測地線方程式

C:X=X(s)是曲面 M 上的一條曲線

$t=\frac{dX}{ds}$ 是單位切向量

$\frac{d}{ds}X=X_i\frac{du^i}{ds}$，則

$\frac{dt}{ds}=\frac{d}{ds}(X_i\frac{du^i}{ds})=X_i\frac{d^2u^i}{ds^2}+(X_{ij}\frac{du^j}{ds})\frac{du^i}{ds}$，$X_{ij}=\Gamma_{ij}^k X_k+b_{ij}N=\Gamma_{kj}^i X_i+b_{kj}N\ldots(*)$

$=(\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Gamma_{jk}^i\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds})X_i+b_{jk}N$ 注意到這裡 $i\leftrightarrow k$，且 $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$

得測地線方程式

$$\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Gamma_{jk}^i\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0$$

$$\begin{cases} d^2u+\Gamma_{11}^1(du)^2+2\Gamma_{12}^1dudv+\Gamma_{22}^1(dv)^2=0 \\ d^2v+\Gamma_{11}^2(du)^2+2\Gamma_{12}^2dudv+\Gamma_{22}^2(dv)^2=0 \end{cases}$$