



蝶戀花·蔓藤在野

蔓繞荒郊侵古道，翠影斜橫，拂露生春早。
野水無聲蘆絮老，斷煙殘月蒼茫曉。

誰倚疏籬情未了？舊夢如藤，縈我心頭繞。
試問年年芳草好，可知別後人憔悴？

§ 01 空間曲線的 Frenet-Serret 公式：

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa N(s) \\ N'(s) = -\kappa T(s) + \tau B(s) \\ B'(s) = -\tau N(s) \end{cases} \text{。其中 } \kappa \text{ 是曲率，} \tau \text{ 是扭率。}$$

以牽牛花的圓柱螺旋線為例：莖的生長方向由單位切向量 $T(s)$ 控制。

參數方程 $X(s) = (r \cos \theta, r \sin \theta, c\theta)$ ，弧長參數 $s = \theta \sqrt{r^2 + c^2}$

$$\kappa = \frac{r}{r^2 + c^2}, \tau = \frac{c}{r^2 + c^2}$$

§ 02 建模與實例

- 藤本植物攀爬的方式主要通過 1.纏繞莖(牽牛花) 2.卷鬚(碗豆) 3.吸附根(常春藤)

空間曲線由兩個量主導，曲率與扭率，可作為攀藤植物成長的數學模型。

螺旋纏繞的數學模型 纏繞莖的軌跡可建模為圓柱螺旋線

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = c\theta$ ，其中 r 為支撐物半徑， c 決定螺距($2\pi c$)，攀緣角

度 α 滿足 $\alpha = \arctan\left(\frac{c}{r}\right)$

曲率 κ ：描述曲線局部彎曲程度，對應向性運動(如向觸性、向光性)。也就是說， κ 受環境刺激(如支撐物接觸)調控，決定莖的攀附路徑。

扭率 τ ：反映曲線扭轉(脫離切平面)程度，對應螺旋生長的力學適應。例如，纏

繞莖的圓柱螺旋線具有恆定扭率 $\tau = \frac{c}{r^2 + c^2}$ ，避免內部維管束因扭轉過度而斷

裂。

2. 環境的影響

- (1) 支撐物直徑：較粗的支撐物通常導致更小的纏繞角度($\frac{c}{r}$ 減小)

- (2) 重力與向觸性：莖尖的向觸性反應使其在接觸支撐物後調整生長方向，形成周期性彎曲，角度受細胞伸長速率差異調控。向光性：莖向光源彎曲時，背光側細胞伸長，曲率暫時增大。障礙規避：遇到障礙物時，曲率局部震盪以調整路徑（類似彈性桿的彎曲波動）。
- (3) 卷鬚的彈性力學：豌豆卷鬚干燥後收縮產生的扭矩可超過 300 nN·m，角度變化遵循胡克定律直至塑性變形。卷鬚老化：隨著卷鬚木質化，扭率逐漸降低，鎖定螺旋結構以固定植株。
- (4) 風力擾動：強風導致莖瞬時扭率波動，通過黏性細胞壁耗散能量。
3. 生物調控：生長素梯度調控細胞壁延展性，通過局部扭轉調整莖的力學平衡。扭率適應應力： τ 平衡莖的扭轉應力，避免機械損傷。

螺旋纏繞的扭率與支撐物直徑成反比 $\tau \propto \frac{1}{r}$ ，粗支撐物上扭率更低，減少能量消耗。

研究表明，約 45° 的角度在穩固性與生長效率間達到平衡，減少滑落風險同時節省能量。亦即當纏繞角度 $\alpha = \arctan \frac{c}{r} \approx 45^\circ$ 時， κ 與 τ 達到平衡，兼顧抗滑能力（高曲率）與低扭轉應力（適度扭率）。

4. 實驗觀測：

- (1) 牽牛花：纏繞角度約 45°，螺距與莖直徑呈正比。
- (2) 豌豆卷鬚接觸後，曲率在 10 分鐘內增至初始值的 3 倍，觸發纏繞。
- (3) 凌霄花：氣生根形成多錨點支撐，角度接近垂直 (<10°)，依賴多點固定增強抗拉強度。

§ 03 生物學意義與進化優勢

- (1) 力學穩定性：較大角度(例 60°)增加莖與支撐物的接觸面積，較小角度(例 30°)利於快速向上成長。
- (2) 資源分配：螺旋結構減少莖的扭轉應力，避免導管斷裂。
- (3) 趨光優化：部分藤本植物（如蛇葡萄）在冠層中調整角度以最大化葉片受光（類似葉序的黃金角 137.5° 原理）。

§ 04 結論

1. 植物的曲率與扭率不僅是幾何的描述，更是生長調控的動力學參數：曲率主導環境響應的局部彎曲。扭率保障長期生長的力學穩定性。二者的協同作用，體現了生物系統在幾何約束下優化生存策略的精密調控。
2. 進化意義與工程啟示
- (1) 能量最小化原則：自然選擇傾向於曲率-扭率組合使總應變能最小

$$E = \int \left(\frac{1}{2} EI \kappa^2 + \frac{1}{2} GJ \tau^2 \right) ds, \text{ 其中 } EI \text{ 為抗彎剛度, } GJ \text{ 為抗扭剛度。}$$

- (2) 仿生應用：柔性機器人：模仿藤本植物的曲率-扭率調控機制，設計自適應纏繞結構。建築材料：優化螺旋鋼筋 κ/τ 的比，提升混凝土抗裂性能。

後記：

這裡面有幾個量：

1. 纏繞角度 $\alpha = \arctan \frac{c}{r} \approx 45^\circ$ 時， κ 與 τ 達到平衡，兼顧抗滑能力(高曲率)與低扭轉應力(適度扭率)。牽牛花的纏繞角度約 45° ，螺距與莖直徑呈正比。
2. 纏繞莖的圓柱螺旋線具有恆定扭率 $\tau = \frac{c}{r^2 + c^2}$ ，避免內部維管束因扭轉過度而斷裂。
3. 螺旋纏繞的扭率與支撐物直徑成反比 $\tau \propto \frac{1}{r}$ ，粗支撐物上扭率更低，減少能量消耗。