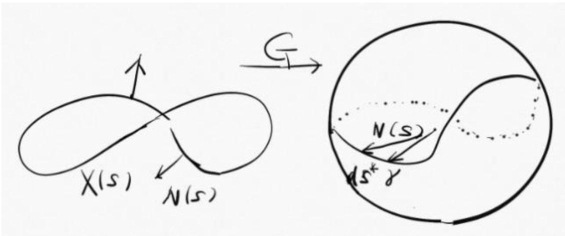
§ Jacobi 定理

設 X=X(s)，$a \le s \le b$ 是 R^3 中一條么速參數化的封閉曲線，考慮曲線上的 Gauss 映射 G，則 G(X(s))在球面上描出一條封閉的 Jordan 曲線，這條曲線把球面分割成體積相等的兩半。

初等微分幾何講稿 p.59

Differential Geometry of Curves and Surfaces M.P.dp Carmo p.278

$\alpha : I \to R^3$ is a closed，regular，parametrized curve with nonzero curvature。



由 Gauss-Bonett 定理

$$\int_R K d\sigma + \int_{\partial R} \bar{\kappa}_g \, ds^* = 2\pi \text{，K=1}$$

(圖中的 N(s)即 n(s))

以下證明 $\int_{\partial R} \bar{\kappa}_g \, ds^* = 0$ ，則 $\int_R d\sigma = 2\pi = \frac{1}{2} area(S^2)$

注意到 S^2 上 n(s)即曲線 γ 的位置函數，$\gamma(s^*) = n(s)$，在 γ 上取么速參數，即

$\left| \frac{d\gamma}{ds^*} \right| = 1$ ，過程中一直會用到 Frenet 公式 $\begin{pmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$

設 $\dot{n} = \frac{dn}{ds^*}$ ，則 $\frac{dn}{ds} = \frac{dn}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \frac{d\gamma}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}$ ，所以 $\frac{ds^*}{ds} = \left|\frac{dn}{ds}\right| = \left|-\kappa t + \tau b\right| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \neq 0$

在 S^2 上 n 是 surface normal vector，所以 $n \wedge \dot{n}$ 落在切平面上

$\bar{\kappa}_g = \langle \ddot{n}, n \wedge \dot{n} \rangle$ (就是 $\frac{dt}{ds} = \kappa_n N + \kappa_g Y$ ，$\kappa_g = \frac{dt}{ds} \cdot Y$ 的意思)

$$\dot{n} = \frac{dn}{ds^*} = \frac{dn}{ds}\frac{ds}{ds^*} = (-\kappa t + \tau b)\frac{ds}{ds^*}$$

$$\ddot{n} = (-\kappa t + \tau b)\frac{d^2 s}{ds^{*2}} + (-\kappa t + \tau b)' \left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 \text{，}$$

其中 $(-\kappa t + \tau b)' = (-\kappa' t + \tau' b) + (-\kappa t' + \tau b') = (-\kappa' t + \tau b') + (-\kappa^2 - \tau^2) n$

$\langle \kappa b + \tau t, -\kappa t + \tau b \rangle = \kappa\tau - \kappa\tau = 0$ ，又 $\langle n, n \wedge \dot{n} \rangle = 0$

$$n \wedge \dot{n} = (\kappa b + \tau t)\frac{ds}{ds^*}$$

所以 $\bar{\kappa}_g = \langle \ddot{n}, n \wedge \dot{n} \rangle = \langle (\kappa b + \tau t), \ddot{n} \rangle \frac{ds}{ds^*}$

$$= < \kappa b + \tau t, -\kappa' t + \tau' b > \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^3 = \frac{-\kappa' \tau + \kappa \tau'}{\kappa^2 + \tau^2} \frac{ds}{ds^*} = \frac{d}{ds} (\tan^{-1} \frac{\tau}{\kappa}) \frac{ds}{ds^*}$$

$\int_{\partial R} \bar{\kappa}_g \, ds^* = \int_{\partial R} \frac{d}{ds} (\tan^{-1} \frac{\tau}{\kappa}) \frac{ds}{ds^*} ds^* = 0$ ，證明完畢。

這是 Gauss-Bonnet 定理與活動標架法的應用。

附註

Poincare lemma

M 是可縮的

(1) $\int_I \omega$ 與路徑無關 (2) $d\omega = 0$ (3) $\exists \varphi$ 使得 $\omega = d\varphi$ 等價

Now $\omega = \frac{\kappa \tau' - \kappa' \tau}{\kappa^2 + \tau^2}$, $\varphi = \tan^{-1} \frac{\tau}{\kappa}$,所以 ω 是一個 exact form

$\oint_X d\omega = 0$