

$\Gamma: X(u)=[a\sin^2 u, a\sin u\cos u, a\cos u]$ ，證明

1. Γ 落在一球面上

2. 所有的 normal plane 皆過原點 (normal plane spanned by n, b)

(x 是 Γ 上一點， y 是過 x 的 normal plane 上任一點，則 $(y-x)\cdot t=0$)

$$1. \begin{cases} (x-\frac{1}{2}a)^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$$

(圓筒跟球面的交線，通過 $A(a, 0, 0)$ ， $B(\frac{3a}{4}, \frac{\sqrt{11}a}{4}, \frac{1}{2}a)$ ， $C(0, 0, a)$)

2. $\dot{X}=[a\sin 2u, a\cos 2u, -a\sin u]$

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{\dot{X} \cdot \dot{X}} = a\sqrt{1+\sin^2 u}$$

$$t = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{du} \frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 u}} [\sin 2u, \cos 2u, -\sin u]$$

Normal plane $(y-x)\cdot t=0$

取 $y=(0, 0, 0)$ 代入 得

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 u}} [-a(\frac{1-\cos 2u}{2}), -a(\frac{\sin 2u}{2}), -a\cos u] \cdot [\sin 2u, \cos 2u, -\sin u] = 0$$

得證。

(normal plane 方程式為 $(\sin 2u)x + (\cos 2u)y - (\sin u)z = 0$)