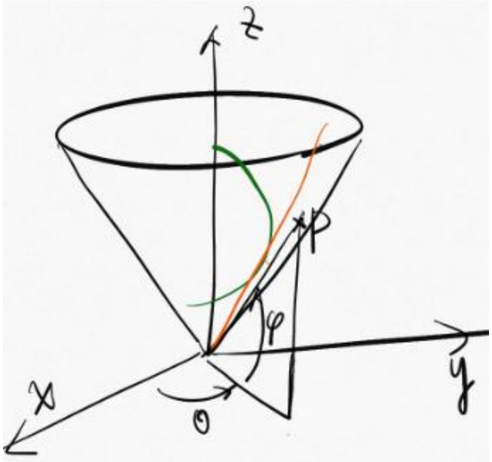

正圓錐面(circular cone)

$X(r,\theta)=[r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi]$

其上一條曲線 C：$r=c\exp(\theta\cos\varphi\cot\beta)$

母線：$\begin{cases} x=r\cos\varphi\cos\theta_0 \\ y=r\cos\varphi\sin\theta_0 \\ z=r\sin\varphi \end{cases}$

證明 曲線 C 與母線的夾角為 β

$X_r=[\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi]$

$X_\theta=[-r\cos\varphi\sin\theta, r\cos\varphi\cos\theta, 0]$，則 E=1，F=0，$G=r^2\cos^2\varphi$

C： $r=c\exp(\theta\cos\varphi\cot\beta)$，

$dr=c(\cos\varphi\cot\beta)\exp(\theta\cos\varphi\cot\beta)d\theta=r\cos\varphi\cot\beta d\theta$

$\delta X=X_r\delta r+X_\theta\delta\theta=X_r\delta r$（因為母線的 $\theta=\theta_0$ 是常數，所以 $\delta\theta=0$

假設 C 與母線夾角=ψ，則

$\cos\psi=\dfrac{dX\cdot\delta X}{|dX||\delta X|}=E\dfrac{dr\delta r}{ds\delta s}+G\dfrac{d\theta\delta\theta}{ds\delta s}=E\dfrac{dr\delta r}{ds\delta s}$（因為 F=0，$\delta\theta=0$）

$ds^2=Edr^2+2Fdrd\theta+Gd\theta^2=dr^2+r^2\cos^2\varphi d\theta^2$

$r^2\cos^2\varphi\cot^2\beta d\theta^2+r^2\cos^2\varphi d\theta^2=r^2\cos^2\varphi\csc^2\beta d\theta^2$

$\delta s^2=E\delta r^2=\delta r^2$，所以 $\dfrac{\delta r}{\delta s}=1$

$\cos\psi=\dfrac{dr}{ds}=\dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{ds}=(r\cos\varphi\cot\beta)\times\dfrac{1}{r\cos\varphi\csc\beta}=\cos\beta$

得證