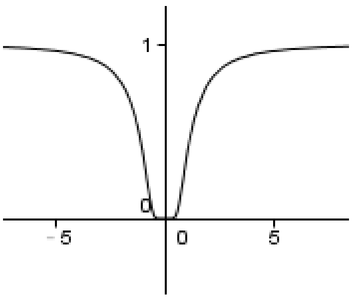
蜘蛛網是懸鏈線http://en.wikipedia.org/wiki/Catenary
科學月刊 1997/6 月 330 期(蔡聰明)
http://210.60.224.4/ct/content/1997/00060330/0010.htm

$$y=f(x)=\begin{cases}0, x=0\\ \exp(-\frac{1}{x^2}), x\neq 0\end{cases}$$



因為$\forall k, f^{(k)}(0)=0$,所以 f(x)在 x=0 附近不能展成 Taylor 展開式,所以 $f\in C^{\infty}$ 但 $f\notin C^{\omega}$

§ 弧長

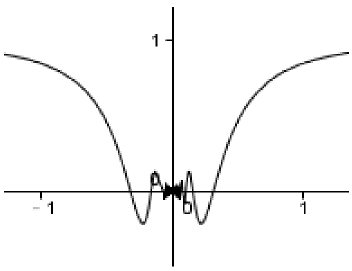
X=(x(u),y(u),z(u)),則弧長 s(u)=$\int_{u_0}^{u}\sqrt{\dot{X}\cdot\dot{X}}\,du$

$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$

平面曲線:$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$

曲面上:$dX=x_u du+x_v dv$ 曲線座標,則 $ds^2=g_{ij}dx^i dx^j$

例1. $y=\begin{cases}0, x=0\\ x\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\end{cases}$ 在 x=0 附近振動得太厲害,此曲線為不可求長



(1) $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$ (2)因為$\left|\sin\frac{1}{x}\right|<1$,所以$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

例2. $X(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$

$\dot{X}(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t, e^t\sin t+e^t\cos t, e^t)$

$\dot{X}\cdot\dot{X}=3e^{2t}$

s=$\int_0^t\sqrt{3}e^t dt=\sqrt{3}(e^t-1)$

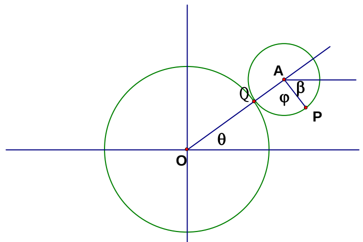
例3.外擺線http://en.wikipedia.org/wiki/Epicycloid

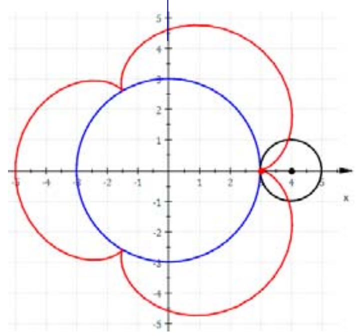
大圓半徑=r_0,小圓半徑=r

$X(\theta)=\overline{OP}=\overline{OA}+\overline{AP}$

$=[(r_0+r)\cos\theta,(r_0+r)\sin\theta]+[r\cos(-\beta),r\sin(-\beta)]$

因為 $\widehat{PQ}=r_0\theta=r\varphi$, $\beta=\pi-\theta-\varphi=\pi-(\frac{r+r_0}{r})\theta$





取 r_0=3,r=1,得右圖。

◇習作◇

r_0=3,r=1 時, $\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left|\frac{dX}{d\theta}\right|d\theta=$ 32

例4.X(t)=(a(1+cost),asint,2asin$\frac{t}{2}$)

($\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4a^2\\(x-a)^2+y^2=a^2\end{cases}$,是一球面與一圓柱面的交線)

◇習作◇

1.求 X(t)=(cosh2t,sinh2t,2t), $0\le t\le\pi$ 的弧長,其中

coshx=$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,sinhx=$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\sqrt{2}\sinh 2\pi$

2.求 X(t)=(acost,asint,bt), $0\le t\le 2\pi$ 的弧長 $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$