

第 30 章 cmc 上的 Jacobi 場與 Morse Index 定理

§1 問題的背景

在本章中，我們將考慮這樣的問題：設常均曲率 (cmc) 曲面 $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ 上有一 domain $D = D(t)$ 隨著時間 t 連續增大，什麼時候在 $D(t)$ 上面會出現非零的 Jacobi 場，其邊界值為 0，而且有體積制限 [見 Ch. 29 定義 2]？這些 Jacobi 場在 t 軸上如何分佈？這是關於 Jacobi 場的一個結構問題，源自 1960 年代出現的 Morse index 定理。

Morse index 定理原始的形式是：考慮 Riemann 流形 X^N 上的一點 p ，及自 $p = \gamma(0)$ 出發的一條測地線 $\gamma(t)$ ，設第一個在 $\gamma(t)$ 上出現的共軛點 (conjugate point) 為 $q_1 \equiv \gamma(t_1)$ ，亦即在 $\widehat{pq_1}$ 上有一個非零 Jacobi 場，由 Ch. 11 定理 Ω ，我們知道：對 $t' \leq t_1 < t''$ ，若記 $q' = \gamma(t')$ ， $q'' = \gamma(t'')$ ，則測地線 $\widehat{pq'}$ 為穩定 (stable)；而 $\widehat{pq''}$ 為不穩定 (unstable)。換句話說，過了 q_1 ，測地線就由穩定轉成不穩定。

這就是說，過了一個共軛點，就增加了一個 index。但一個共軛點對應於一個 Jacobi 場，亦即對應於一個 nullity。所謂一個 nullity 是對應於一個使 $\gamma(t)$ 上的 Hessian E 為 0 的變分向量場。這裡 E 是能量泛函 (energy functional，參見 Ch. 11 定理 Ω)。而所謂一個 index，則對應於一個使 Hessian E 為負定 (negative definite) 的變分向量場。當然 Jacobi 場的重數 (multiplicity) 要併入計算。

因此， $\gamma[0, c)$ 上的 index 等於 $\gamma[0, c)$ 上所有出現過的獨立 (指 linearly independent) Jacobi 場的個數。這便是原始的 Morse index 定理。利用這

定理，Morse¹，Milnor²，Bott³分別計算出 loop space 相關的拓撲結構。

如果在最小曲面 $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ 上，考慮類似的問題，亦即考慮一族連續增大的 domain $D(t)$ ，其中 t 為參數。這時問題會遠為複雜，而變得相當困難，但類似的 Jacobi 場與 index 的關係，仍然成立。在 Ch. 23 §1 中，我們已經對它剛開始的狀況，作了處理，亦即考慮 domain $D(t)$ 在第一共軛邊界之內與之外，由穩定轉變成不穩定的問題。

本章我們將進一步，考慮 cmc 曲面上複雜的 Morse index 問題，描繪出 Jacobi 場如何分佈的情狀。

主要的困難，除了用 Morse Index 定理之外，我們考慮的是廣義的 Jacobi 場是在 Lipschitz domain $D(t)$ 上。技術上，它比在 smooth domain (指 ∂D smooth) 上艱難得多。同時我們又處理 Jacobi 場，容許 $D(t)$ 的拓撲 (topological type) 可以隨著 t 改變，這樣 $D(t)$ 可以伸向 M^n 的遠方，遍及大域。這些技術上的困難，主要呈現在本章最後兩節 §6 與 §7。

在 Ch. 29 §2，我們已描述過一族連續增大的 $D(t) \subset M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ ，($t \in [0, b] \subset \mathbb{R}^1$, $p_0 \in M^n$, $D(0) = p_0$ 點的小鄰域 $\subset M^n$)，如何從 subextremal 變成 extremal，又變成不穩定 (unstable)，並證明 subextremal domain 必然穩定 (stable)。過了 extremal，即 $D(t)$ 為 superextremal，此時變分函數空間 $\mathcal{F}_{D(t)}$ 上的 operator $L = -\Delta_M \varphi - \|B\|^2 \varphi$ [見 Ch. 23 §3，(17)-(18)式]，其特徵值的分佈是

$$\lambda_1(D(t)) < 0 \leq \lambda_2(D(t)) \leq \lambda_3(D(t)) \leq \cdots,$$

但 $D(t)$ 仍然可以是穩定 (stable)。

當 $D(t)$ 持續再增大， $D(t)$ 便會變成不穩定。這個轉變的臨界狀態 [critical status]，我們記為 $D(c)$ ， $c \in [0, b]$ 。下文 §2 定理 2 中，我們先說明對 cmc 曲面，也有類似 Ch. 11 定理 Ω 的現象，亦即 $D(c)$ 有第一共軛邊界。

¹參見 [Mm]。

²參見 [Mj3]。

³參見 [Br]。

§2 臨界狀態

本章論述的方法，是先從此前習慣的 C^∞ -架構出發，一直進行到 §5，把主要結果及其證明的 idea 都勾勒出來。這時發現 C^∞ -架構出現一些不易克服的瑕疵，無法嚴謹的 (rigorously) 適用於我們所需的論證。但我們先忍受這些模糊，直到 §6 與 §7，我們才正式調整架構，把 C^∞ -範疇中所述的內容，提升到 Sobolev 空間，而在 Sobolev 範疇中把瑕疵彌補過來，得到完整而嚴謹的論證。

這樣做的理由，一為： C^∞ -範疇貼近於幾何直觀，無需太多分析學中抽象的語言；二為：遇到 C^∞ -架構無法解決的困難 [例如注記 7 與 8]，才引進 Sobolev 架構，而在 Sobolev 範疇中把那些困難排除，這時我們便清楚看到 Sobolev 理論的用意，它不是為了抽象而抽象，而是為了有效解決問題。

我們沿用 Ch. 29 §2 所給定的架構，但修改一些符號。考慮 $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ 為 cmc 曲面，其均曲率等於常數 H_0 。設 $D \subset M^n$ 為 relatively compact 亦即 D 在 M^n 中的 closure \bar{D} 為緊緻 (compact)，且邊界為 C^∞ 。本章為了簡化符號，“ $D \subset M^n$ ” 就表示這樣的 domain。設

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D) &\equiv \{f : D \rightarrow \mathbb{R}; f \in C^\infty(D) \cap C^0(\bar{D}), f|_{\partial D} = 0\}, \\ \mathcal{G}(D) &\equiv \left\{ f \in \mathcal{F}(D); \int_D f dM = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

其實 $\mathcal{G}(D)$ 就是： $\mathcal{F}(D)$ 中有體積制限 (volume constraint) 的變分函數全體。在 $\mathcal{F}(D)$ 上考慮 L^2 -metric $\langle f, g \rangle = \int_D fg dM$ 。可以看出 $\mathcal{G}(D)$ 是 $\mathcal{F}(D)$ 中的 hypersurface：即 $\mathcal{G}(D) = \ker T, T : \mathcal{F}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ ，

$$T(f) = \int_D f dM, \quad \forall f \in \mathcal{F}(D). \quad (2)$$

稱此前 (Ch. 29 §2) 導出的 operator

$$Lf \equiv -\Delta_M f - \|B\|^2 f, \quad \forall f \in \mathcal{F}(D), \quad (3)$$

為 **stability operator**，其中 Δ_M 為 M^n 上的 Laplacian，而

$$\|B\|^2 = \sum_{i,j}^n h_{ij}^2 \quad (4)$$

為 M^n 在 \mathbb{R}^{n+1} 中第二基本式(h_{ij}) 的 norm square, 其中 h_{ij} 係依據正交標架而取。

在 Ch. 29 §2 中我們已說明 D 上的二階變分式:

$$J''(0) = \int_D L\varphi \cdot \varphi dM, \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}(D), \quad (5)$$

其中 J 為 Area $A(t)$ 加體積制限 $V(t) = V_0$ 的線性泛函 (linear functional):

$$J(t) = A(t) + nH_0 V(t). \quad (6)$$

當 $J''(0) \geq 0, \forall \varphi \in \mathcal{G}(D)$, 我們說 D 為穩定 (stable)。今考慮 L 作用在 $\mathcal{F}(D)$ 上的特徵函數 u_k 及特徵值 λ_k :

$$Lu_k = \lambda_k u_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \dots \rightarrow \infty, \quad (8)$$

其中 $\{u_k\}$ 為構成 $\mathcal{F}(D)$ 的一組正交基。利用 Rayleigh 係數, 可以看出

$$D' \subset D'' \Rightarrow \lambda_k(D') \geq \lambda_k(D''). \quad (9)$$

考慮相應於 L 的 symmetric bilinear form:

$$I(f, g) = \int_D (Df \cdot Dg - \|B\|^2 fg) dM \quad (10a)$$

$$= \int_D Lf \cdot g dM, \quad (10b)$$

$\forall f, g \in \mathcal{F}(D)$ 。知

$$J''(0) = \int_D Lf \cdot f dM = I(f, f) \quad (11)$$

時常表 $I(f, f)$ 為 $I(f)$ 。

定義 1 給定 $D \subset M^n$ ，在 $\mathcal{G}(D)$ 中按序定義 **unstable cone** $\tilde{\Lambda}$ 及 strict unstable cone $\tilde{\Lambda}^-$ 為

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda} &= \{f \in \mathcal{G}(D); I(f) \leq 0\} \subset \mathcal{G}(D), \\ \tilde{\Lambda}^- &= \{f \in \mathcal{G}(D); f = 0 \text{ 或 } I(f) < 0\} \subset \mathcal{G}(D),\end{aligned}\tag{12}$$

[以下 $\tilde{\Lambda}^-$ 有時也簡稱 unstable cone]。

如果不加體積制限 (volume constraint)，一般我們稱為 “Dirichlet sense”，並在 Dirichlet sense 下定義相應的 unstable cone：

$$\begin{aligned}\Lambda &= \{f \in \mathcal{F}(D); I(f) \leq 0\} \subset \mathcal{F}(D), \\ \Lambda^- &= \{f \in \mathcal{F}(D); f = 0 \text{ 或 } I(f) < 0\} \subset \mathcal{F}(D).\end{aligned}\tag{13}$$

容易看出： $\tilde{\Lambda}^- = \Lambda^- \cap \mathcal{G}(D)$ ， $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cap \mathcal{G}(D)$ 。注意：

$$D \text{ 爲 stable iff } \tilde{\Lambda}^- = \{0\},\tag{14}$$

亦即：iff Dirichlet (strict) unstable cone 除 0 點外，沒有碰到 hyperplane $\mathcal{G}(D)$ 。又注意 D 爲 unstable iff $\tilde{\Lambda}^- \supsetneq \{0\}$ 。

關於 **Jacobi 場**，**共軛邊界**，**第一共軛邊界**等概念，我們仍沿用 Ch. 29 §2 的定義 2。例如 Jacobi 場指的是 $\varphi \in \mathcal{G}(D)$ ， $\varphi \neq 0$ ，且 $\int_D L\varphi \cdot g dM = 0, \forall g \in \mathcal{G}(D)$ 。現今我們說：「unstable cone Λ 在 φ 切觸 (touches) $\mathcal{G}(D)$ 」的意思是：

$$0 \neq \varphi \in \Lambda \cap \mathcal{G}(D), \text{ 而且 } \tilde{\Lambda}^- = \{0\}.\tag{15}$$

定理 1 給定 $D \subset M^n$ ，設 Λ 在 φ 切觸 $\mathcal{G}(D)$ ，則 φ 爲 D 上的 Jacobi 場。

證明： 由(15)式，知 $I(f) \geq 0, \forall f \in \mathcal{G}(D)$ 。任意給定 $g \in \mathcal{G}(D)$ ，欲證 $I(\varphi, g) = 0$ ：考慮 $F(t) \equiv I(\varphi + tg), t \in \mathbb{R}$ ，則因 $\varphi + tg \in \mathcal{G}(D)$ ，

故 $F(t) \geq 0$ 。另外， $\varphi \in \Lambda$ 由(13)式知 $I(\varphi) \leq 0$ ，但因 $\varphi \in \mathcal{G}(D)$ ，由(15)式知 $I(\varphi) \geq 0$ ，故

$$F(0) = I(\varphi) = 0.$$

因此 $F(t)$ 在 $t = 0$ 點取得最小值。得：

$$\begin{aligned} 0 = F'(0) &= \left. \frac{d}{dt} (I(\varphi + tg)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (I(\varphi, \varphi) + 2tI(\varphi, g) + t^2I(g, g)) \right|_{t=0} = 2I(\varphi, g). \end{aligned} \quad (16)$$

知 φ 為 D 上的 Jacobi 場。 ■

注記 1 設 $D \subset M^n$ ，則 $\varphi \in \mathcal{G}(D)$ 為 D 上的 Jacobi 場 iff

$$L\varphi = \text{常數 } a = \frac{1}{|D|} \int_D L\varphi dM, \quad (17)$$

其中 $|D| = \text{Area } D$ 。這事很容易檢驗：若 $L\varphi = a$ ，則

$$I(\varphi, g) = \int_D L\varphi \cdot g dM = a \int_D g dM = 0, \quad \forall g \in \mathcal{G}(D).$$

因此 φ 為 D 上的 Jacobi 場。反過來，給定 D 上的 Jacobi 場 $\varphi \in \mathcal{G}(D)$ ，若 $L\varphi$ 非常數，則有兩點 $p, q \in D$ ， $L\varphi(p) \neq L\varphi(q)$ 。製作函數 $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ ，使 $g = 0$ 於 $D - N_p \cup N_q$ ，其中 N_p 與 N_q 分別是 p 與 q 的小鄰域， $N_p \cap N_q = \emptyset$ ，且 $|N_p| = |N_q|$ ；而且讓 $g = +1$ 於 N_p ， $g = -1$ 於 N_q 。然後把 g smooth out，使 $g \in \mathcal{G}(D)$ ，則 $\int_D L\varphi \cdot g dM \neq 0$ 。與 φ 為 Jacobi 場矛盾。 ■

今對任何 $f \in \mathcal{F}(D)$ 作 L^2 -展開，成 $f = \sum_k a^k u_k$ [省略 \sum_k 的符號，以下皆然]。則

$$\Lambda = \{f \in \mathcal{F}(D); \lambda_1(a^1)^2 + \lambda_2(a^2)^2 + \cdots \leq 0\}. \quad (18)$$

理由是：

$$\begin{aligned}
 I(f, f) &= \int_D L(a^i u_i) \cdot (a^j u_j) dM \\
 &= \int_D (a^i \lambda_i u_i) \cdot (a^j u_j) dM = (a^1)^2 \lambda_1 + (a^2)^2 \lambda_2 + \dots .
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

設有 $D = D(t) \subset M^n$ ，隨著 t 連續增大。我們在 §3 將對這樣的面域族，做出確切的定義，稱為遞增面域族 (monotone continuum) $\mathcal{D} = \{D(t); t \in [0, b]\}$ ， $D(0) = p_0 \in M^n$ ，使 $\lambda_k = \lambda_k(t)$ 也隨著 t 「連續」變動（事實上是連續變小，因(9)式之故，但連續這件事是關鍵，而且需要仔細分析的，在 §6 之後我們會嚴謹處理）。對於這樣的 \mathcal{D} ，我們看出當 $D(t) = D(e)$ ， $e \in [0, b]$ ，為 extremal 時，

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \dots \rightarrow \infty.$$

對於 $t < e$ ，由(19)式，知 $I(f) > 0, \forall f \in \mathcal{F}(D)$ ，除非 $f = 0$ 。故 unstable cone $\Lambda = \{0\}$ ， $\forall t < e$ 。但當 $t = e$ ，知 $\Lambda = \langle u_1 \rangle$ ，且 $\Lambda^- = \{0\}$ 。

當 $D(t)$ 繼續增大，unstable cone Λ 開始出現時，第一特徵函數 u_1 或 u_1 的倍數 cu_1 必然是頭一個納入 Λ 中的變分函數，但 $\Lambda(e)$ 除 0 點外，還不會碰到 $\mathcal{G}(D)$ ，因在 D 的內部， $u_1 > 0$ ，故 $u_1 \notin \mathcal{G}(D)$ ，其中 $\Lambda(t)$ 指 $D(t)$ 上的 Λ 。然後 $\Lambda(t)$ 繼續增加，直到 Λ 除 0 點外首度碰到 $\mathcal{G}(D)$ 。此時切觸的 φ 便是 Jacobi 場，而 D 則有第一共軛邊界。 $\mathcal{G}(D)$ 首度有非零的變分函數由 stable 進入 unstable，這就是從“穩定”進入“不穩定”的臨界狀態。此時我們記 $D = D(c)$ ， $0 < e < c < b$ ， c 指臨界時刻。

對此，我們給予清楚的證明：

定理 2 設 $D \subset M^n$ 有共軛邊界，即存在 D 上的 Jacobi 場 $\varphi \in \mathcal{G}(D)$ ，又設 $D' \supsetneq D$ ，則 D' 為 unstable，亦即有 $g \in \mathcal{G}(D')$ ， $I(g) < 0$ 。

證明： Step 1. 考慮 $g = \frac{1}{\alpha}\psi + \alpha h$ ， $\alpha > 0$ 是個待定的微小數。其中

$$\psi = \varphi \text{ 於 } D; \quad \psi = 0 \text{ 於 } G \equiv D' - D. \tag{20}$$

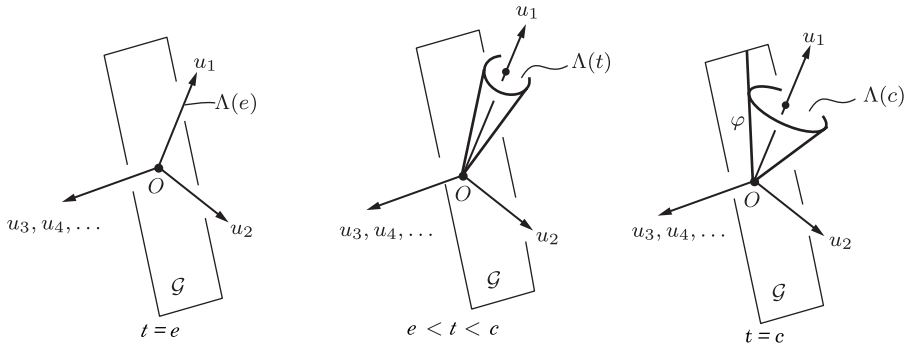


圖 30.1

[最後才 smooth out ψ] 而 $h \in \mathcal{G}(D')$ 使得

$$h|_{\Gamma} = -\beta \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \quad \int_{D'} h dM = 0, \quad \Gamma = \partial D \cap D', \quad (21)$$

且 $\beta \in \mathcal{F}(D')$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\beta|_{\Gamma_0} = 1$, $\Gamma_0 \subset \subset \Gamma$ 。(見圖 30.2)

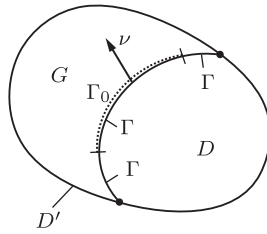


圖 30.2

Step 2. 在 D' 上，考慮

$$I_{D'}(u, v) = \int_{D'} (u_i v_i - \|B\|^2 uv) dM, \quad (22)$$

其中 $u_i = D_i u$ ，“ \sum ”省略，以下“ dM ”也省略。並計算沿變分函數 g 的二階變分式。注意 g 只是片狀勻滑 (piecewise smooth)，此時(10b)雖不成立，但(10a)成立，我們得知：

$$\begin{aligned} J''_{D'}(0) &= I_{D'}(g) = I_{D'}\left(\frac{1}{\alpha}\psi + \alpha h, \frac{1}{\alpha}\psi + \alpha h\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} I_D(\varphi, \varphi) + 2I_D(\varphi, h) + \alpha^2 I_{D'}(h, h) \end{aligned}$$

$$\equiv \text{I} + \text{II} + \text{III} \quad [\text{按序記成三項}], \quad (23)$$

而

$$\begin{aligned} \text{I} &= \frac{1}{\alpha^2} \int_D (\varphi_i \varphi_i - \|B\|^2 \varphi^2) = \frac{1}{\alpha^2} \int_D ((\varphi_i \varphi) - \varphi_{ii} \varphi - \|B\|^2 \varphi^2) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left(\int_{\partial D} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \varphi + \int_D L\varphi \cdot \varphi \right) = 0, \quad [\text{因 } \varphi|_{\partial D} = 0, \text{ 且 } \varphi \text{ 爲 Jacobi.}] \\ \text{II} &= 2 \int_D (\varphi_i h_i - \|B\|^2 \varphi h) = 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \cdot h + 2 \int_D L\varphi \cdot h \\ &= -2 \int_{\Gamma} \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 + 0. \quad [\text{此因(21)式, 且 } \varphi \text{ 爲 Jacobi.}] \end{aligned}$$

所以 $J''(0) = 0 + (-A) + \alpha^2 I_{D'}(h, h)$ 。其中 $-A < 0$ ，且與 α 無關。選擇 $\alpha > 0$ 夠小，則知 $J''_{D'}(0) < 0$ ，即 D' 爲 unstable。■

一般說來，變分學處理的變分函數不一定是可微（勻滑），例如定理 2 中 g 的製作。我們可以把變分函數的集合 $\mathcal{F}(D)$ ，擴充到 Sobolev 空間 $W_0^{1,2}(D)$ ，這裡 $W_0^{1,2}(D)$ 表示 $\mathcal{F}(D) \cap W^{1,2}(D)$ 在一階 Sobolev 空間 $W^{1,2}(D)$ 中的 closure，而 $W^{1,2}(D)$ 就是在 $L^2(D)$ 中，存在一階弱微分，且一階弱微分也落在 $W^{1,2}(D)$ 中的所有函數全體 [見 Ch. 23 §3]。注意：在一般 Sobolev 理論中， $W_0^{1,2}(D)$ 指的是 $\mathcal{C}_c^\infty \equiv \{f \in \mathcal{C}^\infty(D) : \overline{\text{supp} f} \subset D\} \subset \mathcal{F}(D)$ 在 $W^{1,2}(D)$ 中的 closure。但這兩種定義，其實是一樣的 [見本章 §7.1 Observation Z]。

相應的，上述 hypersurface \mathcal{G} 則擴充到

$$H(D) \equiv \left\{ f \in W_0^{1,2}(D); \int_D f dM = 0 \right\}. \quad (24)$$

亦即： $H(D)$ 爲 \mathcal{G} 在 $W^{1,2}(D)$ 中的 closure。我們考慮 extension

$$(\mathcal{F}(D), \mathcal{G}) \hookrightarrow (W_0^{1,2}(D), H(D)). \quad (25)$$

本章前述的內容對 $(W_0^{1,2}(D), H(D))$ 基本上都仍然有效，除了相關語言必

須調整，例如在 $\mathcal{F}(D)$ 中考慮(17)式

$$Lf = -\Delta_M f - \|B\|^2 f = a, \quad (26)$$

的解 f ，現今必須改成弱解 (weak solution) f 滿足

$$I(f, g) = \int_D (Df \cdot Dg - \|B\|^2 fg) = \int_D a \cdot g, \quad \forall g \in H(D). \quad (27)$$

又例如在 $W_0^{1,2}(D)$ 中的值譜定理仍然有效 [見本章 §6.3，所以(7)式與(8)式依舊成立；而二階變分式 ((11)式) 則改以

$$J''(0) = \int_D (\|Df\|^2 - \|B\|^2 f^2) dM = I(f, f). \quad (28)$$

對於 unstable cones，我們仍沿用 $\tilde{\Lambda}^-$ ， $\tilde{\Lambda}$ ； Λ^- ， Λ 的符號。事實上，如前所述，把本章到 §5 所談的內容，從 C^∞ -範疇提升到 Sobolev 範疇，論述才算嚴謹。那是隨後在 §6-§7 要完成的工作。現今我們還是停留在不算嚴謹的 C^∞ -範疇中討論，因為這樣種種概念比較貼近直覺而明白易懂。

定理 3 給定 $D \subset M^n$ ，relatively compact，又 $R > 0$ ，考慮

$$\Lambda^R \equiv \{f \in W_0^1(D); I_D(f, f) \leq 0 \text{ 且 } \|f\|_{L^2} < R\}, \quad (29)$$

則 Λ^R 在 $L^2(D)$ 為緊緻，亦即 $\forall \{f_n\} \subset \Lambda^R$ ， f_n 在 $L^2(D)$ 中有收斂子序列。

證明： 因 $f_n \in \Lambda^R$ ， $I(f_n, f_n) = \|Df_n\|^2 - \int_D \|B\|^2 f_n^2 \leq 0$ ，知

$$\|Df_n\|^2 \leq \int_D \|B\|^2 f_n^2 \leq b_0 \cdot \|f_n\|^2, \quad b_0 > 0, \quad (30)$$

其中 b_0 為 $\|B\|^2$ 在緊緻集合 \bar{D} 中的一個上界。因此

$$\|f_n\|_{W^{1,2}(D)}^2 = \|Df_n\|^2 + \|f_n\|^2 \leq (b_0 + 1) \|f_n\|^2 \leq (b_0 + 1) R^2. \quad (31)$$

由 Rellich 緊緻定理 (見 Ch. 23 §7)，得 $\{f_n\}$ 有收斂子序列，且其極限 $\varphi \in L^2(D)$ 。 ■

注記 2 定理 3 中的收斂函數 φ 在某些狀況下，可證明為 C^∞ 。例如考慮 $D(t)$ ，當 $t \geq e$ 之後， $\Lambda(t)$ 會隨著 $D(t)$ 增大而增大，終至切觸 $\mathcal{G}(D(c))$ 於 $\varphi \in L^2(D(c))$ 。注意由定理 3 所得 Λ^R 的緊緻性，保證切觸函數 φ 必然存在。今又因 φ 取得 $I(g, g)$ 在 $\mathcal{G}(D(c))$ 上的極值（最小值），由一般橢圓偏微分方程的理論，知 φ 為 regular，即 $\varphi \in C^\infty(D(c))$ 。

§3 主要問題

考慮一族連續增大的 $D(t) \subset M^n, 0 \leq t \leq b$ 。設 $p_0 \in M^n, D(0)$ 為 p_0 在 M^n 中的小鄰域。同時在 $D(t)$ 上考慮值譜分解(7)與(8)式。在多數狀況下 $\lambda_k = \lambda_k(t)$ 是隨著 t 而連續的下降 [詳見本章 §6 與 §7]。如前所述，當 $D(t)$ 從一點 p_0 增大到成為 extremal domain $D(e)$ ，即 $\lambda_1 = 0$ 時， λ_k 皆 ≥ 0 。我們記

$$D(e) = D[\lambda_1 = 0]. \quad (32)$$

其後，到 $\lambda_2 = 0$ 時，記 $D(t)$ 為 $D[\lambda_2 = 0]$ ，在下文定理 4 中，我們會看到臨界狀態的 $D(c)$ 滿足：

$$D[\lambda_1 = 0] \subset D(c) \subset D[\lambda_2 = 0]. \quad (33)$$

此即在 $D[\lambda_1 = 0]$ 與 $D[\lambda_2 = 0]$ 之間，會有 Jacobi 場出現。注意值譜分解(7)與(8)式考慮的是純粹的 Dirichlet 意義。並未加上 cmc 曲面重要的變分條件，亦即未要求體積制限 (volume constraint) $V = \text{常數 } V_0$ 。

主要問題 設 $D[\lambda_k = 0]$ 表 $\lambda_k = 0$ 時的 $D(t)$ ，即此時有

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{k-1} \leq \lambda_k = 0 \leq \lambda_{k+1} \leq \lambda_{k+2} \leq \cdots \rightarrow \infty. \quad (34)$$

對任何自然數 k ，是否存在 Jacobi 場介於 $D[\lambda_{k-1} = 0]$ 與 $D[\lambda_k = 0]$ 之間？亦即是否存在 $D(t)$ ，使 $D(t)$ 上有（非零的）Jacobi 場，且

$$D[\lambda_{k-1} = 0] \subset D(t) \subset D[\lambda_k = 0]? \quad (35)$$

其中 $t \in [0, b)$ ， b 夠大。以下用 t_k 表示 $D[\lambda_k = 0]$ 的參數 t ，亦即

$$D(t_k) = D[\lambda_k = 0]. \quad (36)$$

當 $D(t)$ 沿 t 而增大時， $\{t_k\}$ 將拿來當作 Jacobi 場分佈的參考架構。

這是本章要證明的主要結果，事實上 Jacobi 場的重數 (multiplicity) 也與 λ_k 的重數有自然的對應關係。

Barbosa-Bérard [B-B] 證明了 “twisted” eigenvalue λ_k^T 與 Dirichlet eigenvalue λ_k (見(34)式) 是交互出現的，亦即 $\lambda_k \leq \lambda_k^T \leq \lambda_{k+1}, \forall k$ 。把他們的結果放在我們的架構中，考慮遞增面域族 $\mathcal{D} = \{D(t); t \in [0, b]\}$ ，如果證得 $\lambda_k = \lambda_k(t)$ 為連續 [見 §6 與 §7]，那麼根據他們的結果，也可以導出本章的部份結果，只是 [B-B] 是靜態的，並以純分析學的方式呈現，在本章(34)式的結果則為動態的 [與 t 相關]，且以幾何的形式呈現。更關鍵的是：[H-L] 考慮的 $D(t)$ 不只動態，而且 $D(t)$ 的 topological type 可以改變； $D(t)$ 本身更是遠為廣義的 Lipschitz domain。

對於主要問題，我們先用維數 $n = 1$ 的例子，來看(35)式如何呈現。

例 1 設 $M^1 = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ，考慮 $\mathbb{R}^1 \overset{\mathbf{x}}{\curvearrowright} \mathbb{R}^2$ ，

$$\mathbb{R}^1 = T_0 M^1 = \{t \in \mathbb{R}^1; t \in (-\infty, \infty)\},$$

$\mathbf{x}(t) = e^{it} \in S^1 \subset \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}^1$ 。考慮 $D_\ell = \{e^{it} \in S^1; 0 < t < \ell\} \subset S^1$ ，當 ℓ 增加， D_ℓ 亦增大。視 $M^1 = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 為一維的 cmc 曲面。

(i) 給定 k ，求 ℓ ，使 $D_\ell = D[\lambda_k = 0]$ ：在 $\mathcal{F}(D_\ell)$ 上考慮前述 stability operator 在 $n = 1$ 的特殊情況，得：

$$Lf = -\Delta_M f - \|B\|^2 f = -f'' - f. \quad (37)$$

其中 $f = f(t), t \in (0, \ell)$ 。至於 L 的特徵函數 u_k 則滿足

$$u_k'' = -(1 + \lambda_k) u_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (38)$$

容易計算出：在 D_ℓ 上

$$u_k = c_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} t\right); \quad \lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} - 1, \quad (39)$$

而 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \rightarrow \infty$ ，由上式 [(38)式]，

$$\lambda_k = 0 \quad \text{iff} \quad \ell = k\pi. \quad (40)$$

因此 $D_{k\pi} = D[\lambda_k = 0]$ 。注意 D_π 為 extremal domain $D(e)$ ， $D_{2\pi}$ 為臨界狀態的 $D(c)$ 。在 $D_{k\pi} = D[\lambda_k = 0]$ 上，我們記特徵值 $\lambda_k = 0$ 所對應的特徵函數為 u_k^* ，則

$$u_k^*(t) = c_k \sin t. \quad (41)$$

(ii) 求 ℓ ，使 D_ℓ 上有 Jacobi 場：注意 $g \in \mathcal{F}(D_\ell)$ 為 Jacobi 場 iff

$$Lg = -g'' - g = a, \text{ 其中 } a \text{ 為一常數}. \quad (42)$$

注意 $g(t) = A \cos t + B \sin t - a$ 為一般解，不妨設 $a = 1$ 。顯然 $g \in \mathcal{G}(D_\ell)$ iff $g(0) = 0 = g(\ell)$ 且 $\int_0^\ell g dt = 0$ 。易知有如下關係 $\psi(\ell) \equiv 2 - 2 \cos \ell - \ell \sin \ell = 0$, iff D_ℓ 上有 Jacobi 場。描繪 $\psi(\ell)$ 的圖形（見圖 30.3）。設 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$ 表 $\psi(\ell) = 0$ 的解，則

$$\begin{aligned} \ell_1 &= 2\pi \in (\pi, 2\pi], & \ell_2 &\in ((2.5)\pi, 3\pi) \subset (2\pi, 3\pi], \\ \ell_3 &= 4\pi \in (3\pi, 4\pi], & \ell_4 &\in ((4.5)\pi, 5\pi) \subset (4\pi, 5\pi], \\ \ell_5 &= 6\pi \in (5\pi, 6\pi], & \ell_6 &\in ((6.5)\pi, 7\pi) \subset (6\pi, 7\pi], \dots \end{aligned} \quad (43)$$

符合主要問題的猜想(35)式。

(iii) 由(36)及 (i)，知 $t_k = k\pi, \forall k = 1, 2, 3, \dots$ ；而由 (ii) 知 D_ℓ 上有（非零的）Jacobi 場 iff $\ell = \ell_k$ 且

$$t_k \leq \ell_k \leq t_{k+1} \quad (44)$$

由於維數 $n = 1$ 時， $M^1 = S^1$ 是唯一的 cmc 曲面，所以例 1 (44)式，佐證了 $n = 1$ 時主要問題中的猜想 [(35)式]。 ■

先證明一般維數時的(35)式，在 $k = 2$ 時成立：

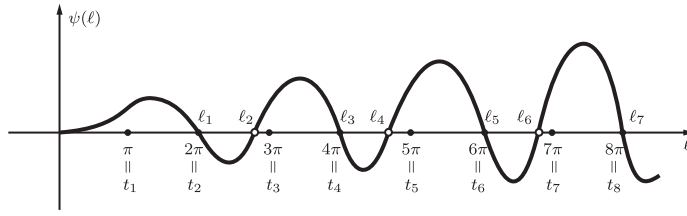


圖 30.3

定理 4 在 $D(e)$ 與 $D[\lambda_2 = 0]$ 之間，存在臨界狀態的 $D(c)$ [稱之為 critical domain]。此臨界狀態 $D(c)$ 上有 (非零的) Jacobi 場，且有第一共軛邊界。

證明： *Step 1.* 由(36)的定義， $D(t_2) = D[\lambda_2 = 0]$ 。在 $D(t_2)$ 上， $\lambda_1(t_2) < \lambda_2(t_2) = 0$ ， $Lu_k = \lambda_k u_k$ ， $u_k \in \mathcal{F}(D(t_2))$ ， $k = 1, 2, \dots$ 。欲證：

$$\tilde{\Lambda}(D(t_2)) \equiv \Lambda(D(t_2)) \cap \mathcal{G}(D(t_2)) \neq \{0\}. \quad (45)$$

事實上，對任意 $v = \alpha u_1 + \beta u_2 \in \mathcal{F}(D(t_2))$ ，知： $v \in \Lambda(D(t_2))$ iff $I(v) = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 \leq 0$ 。我們選取 α 與 β ，使 $\beta \neq 0$ ，而且

$$\alpha = -\beta \int_D u_2 / \int_D u_1, \quad [\text{注意 } \int_D u_1 \neq 0]. \quad (46)$$

則 $\int_D v = \alpha \int_D u_1 + \beta \int_D u_2 = 0$ 。故 $v \in \Lambda(D(t_2)) \cap \mathcal{G}(D(t_2)) = \tilde{\Lambda}(D(t_2))$ 。知 $\tilde{\Lambda}(D(t_2)) \neq \{0\}$ 。

Step 2. 由定理 3 中證得

$$\Lambda^R(D) \equiv \Lambda(D) \cap \left\{ f \in \mathcal{F}(D); \int_D f^2 < R \right\} \quad (47)$$

在 $L^2(D)$ 中為緊緻。再由 *Step 1*，知在 $t \leq t_2$ 時必有 t 使得 $\Lambda^R(D(t))$ 「切觸」 $\mathcal{G}(D(t))$ 。根據定理 1，其切觸向量 φ 就是所求的 Jacobi 場。 ■

今考慮 “twisted” operator \tilde{L} [見 Barbosa-Bérard [B-B]]；注意一般來說， L 的 restriction

$$L|_{\mathcal{G}(D)} : \mathcal{G}(D) \rightarrow C^\infty(D) \quad (48)$$

並不是 $\mathcal{G}(D) \rightarrow \mathcal{G}(D)$ 的 operator。但是如果我們改以考慮

$$\tilde{L}g = Lg - \frac{1}{|D|} \int_D Lg, \quad \forall g \in \mathcal{G}(D), \quad (49)$$

其中 $|D| \equiv \text{Area}(D)$ ，則 $\forall g \in \mathcal{G}(D)$ ，可得

$$\int_D \tilde{L}g = \int_D Lg - \left(\frac{1}{|D|} \int_D Lg \right) \int_D 1 = 0. \quad (50)$$

其相應的 bilinear form 為

$$\tilde{I}(g, f) = \int_D \tilde{L}g \cdot f = \int_D Lg \cdot f = I(g, f), \quad (51)$$

$\forall g, f \in \mathcal{G}(D)$ 。注意上式中我們用到 $\int_D f = 0$ 。由(51)式，知 \tilde{L} 在 $\mathcal{G}(D)$ 上的 unstable cone 為：

$$\Lambda(D) \cap \mathcal{G}(D) = \tilde{\Lambda}(D). \quad (52)$$

雖然(50)式中 $\tilde{L}g$ 滿足 $\int_D Lg = 0$ ，但 $\tilde{L}g|_{\partial D}$ 一般不會等於 0。所以 L 並不把 $\mathcal{G}(D)$ 映到 $\mathcal{G}(D)$ 中，只知

$$\tilde{L} : \mathcal{G}(D) \rightarrow C^\infty(D). \quad (53)$$

但如果把目前所討論的 C^∞ -範疇提升到 Sobolev 範疇，則可以證知

$$\tilde{L} : H^2(D) \rightarrow H^0(D) \quad [\text{詳見 §6}] \quad (54)$$

其中 $H^2(D)$ 與 $H^0(D)$ 依序分別為 $\mathcal{G}(D)$ 在 $W^{2,2}(D)$ 與 $L^2(D)$ 中的 closure。注意 $H^{k+1}(D)$ 在 $H^k(D)$ 中 dense。這些概念到 §6 會有詳細的解說。

§4 Morse index 定理

前述定理 2，其實是 Morse index 定理的特例，它指出：當第一個 Jacobi 場出現時，繼之而來的，便有一個 index（標數）與 Jacobi 場相對

應。定理 2 的證明，是需要一些具體的分析學的技巧。但有趣的是，比它遠為廣義的、抽象的 Morse index 定理證明起來卻很簡單 [見下文定理 5]。這怎麼可能呢？原因是抽象的 Morse index 定理建立在 Ch. 23 值譜分解 (spectrum decomposition) 的基礎上面。而值譜分解定理，須利用複雜的分析學才得以證明。所以並不是把問題抽象化與普遍化，便可以「平白的」取代深刻的具體問題。

這就是數學具體與抽象兩者之間的辯證關係。具體的定理 2，與抽象的 Morse index 定理，為這辯證關係提供了一個重要而有趣的例子。當然我們也必須確認 $\lambda_k = \lambda_k(t)$ 對 t 連續。[見 §6-§7]

現在我們來介紹抽象的 Morse index 定理。這個 Morse index 定理的抽象形式是 Frid-Thayer [F-T] 的貢獻。

設 X 為一個 Hilbert 空間， $A : X \rightarrow X$ 為 linear, self-adjoint 而且連續，設

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad (55)$$

其中 $\{e_k\}$ 為 X 上的一組正交基，而

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \rightarrow \infty. \quad (56)$$

設 $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 為相應於 A 的 bilinear form，i.e.

$$B(f, g) = \langle Af, g \rangle, \quad \forall f, g \in X. \quad (57)$$

則 B 為對稱並連續。如果 $\varphi \in X$ 而 $\varphi \in \ker A$ ，則稱 φ 為一個抽象的 Jacobi 場，此時 $A\varphi = 0$ 。這相當於

$$B(\varphi, g) = 0, \quad \forall g \in X; \quad (58)$$

理由是：若 $A\varphi = 0$ ，則 $B(\varphi, g) = \langle A\varphi, g \rangle = 0, \forall g \in X$ 。反過來，選 $g = A\varphi \in X$ ，則 $\|A\varphi\|^2 = \langle A\varphi, A\varphi \rangle = B(\varphi, A\varphi) = 0$ 。故 $A\varphi = 0$ 。設 φ 滿足(58)，我們也稱 $\varphi \in \text{Ker } B$ 。顯然， $\text{Ker } A = \text{Ker } B$ 。另一方面，滿足 $B(e_k, g) = \lambda_k \langle e_k, g \rangle, \forall g \in X$ ，則亦稱 λ_k 與 e_k 按序分別為 B 的特徵值與特徵函數，此條件與(55)式等價。

注意當我們要將這抽象的架構施用於前述 cmc 上的 Jacobi 場時，我們考慮的 A 不再是前述的 L ，而是 \tilde{L} ，這是一個關鍵。根據(17)式及(49)式，cmc 上的 Jacobi 場 φ 就是滿足 $\tilde{L}\varphi = 0$ 的那些 $\mathcal{G}(D)$ 中的函數 φ 。

定義 2 我們定義 bilinear form B 的 nullity ν 為

$$\nu = \dim(\ker B). \quad (59)$$

所以 nullity ν 其實是所有「線性獨立的 Jacobi 場」(以下簡稱為獨立 Jacobi 場) 的個數。

另一方面考慮 unstable cone

$$\Lambda^- \equiv \{f \in X; f = 0 \text{ 或 } B(f, f) < 0\}. \quad (60)$$

定義 3 我們定義 B 的 index $i = \text{Ind}(B)$ 為

$$i = \dim W, \quad (61)$$

其中 W 為包含於 Λ^- 中最大的線性空間 (linear space)。

今給定 $X = X(t)$ 為一族隨著 t 連續遞增的 Hilbert space，其中 $t \in [0, b]$ ，而且 $X(t) \subsetneq X(s)$ ， $\forall t < s$ 。把 $X(t)$ 都當成 $X(b)$ 中的 subspace， $\forall t \in [0, b]$ 。設 $A = A(t)$ 為 $X(t)$ 上隨著 t 連續變化的 self-adjoint, continuous linear operator，其值譜 $\{e_k(t), \lambda_k(t)\}$ 滿足(55), (56)兩式，而且 $\lambda_k(t)$ 隨著 t 連續且嚴格的下降。不妨設當 $t = 0$ 時， $\lambda_k(0) > 0$ ， $\forall k$ 。

設 $\nu(t)$ 與 $i(t)$ 分別表示相應於 $B = B(t)$ 的 nullity 與 index。Frid-Thayer [F-T] 建立了下述的 Morse index 定理。

定理 5 (Morse index 定理的原型) 給定 $X(t)$ 與 $B(t)$ 如前述。對 $\alpha, \beta \in [0, b]$ ，若 $0 \leq \alpha < \beta \leq b$ ，則

$$i(\beta) - i(\alpha) = \sum_{\alpha \leq t < \beta} \nu(t). \quad (62)$$

注意上式右端為 $t \in [\alpha, \beta)$ 的 $X(t)$ 中所有獨立 Jacobi 場的個數。我們很容易用口述來證明這個 Morse index 定理。

注記 3 定理 5 的敘述，可以只涉及 $B(t)$ ，無需預先給定 $A(t)$ 。此時 Morse index 定理仍然成立。

證明：

Step 1. (index) 注意 $i(t)$ 表 $\dim W(t)$ ，其中 $W(t)$ 為包含於 $\Lambda^-(t)$ 中最大的線性空間。但是 $\Lambda^-(t)$ 指：0 點加上滿足

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_j x_j^2 + \cdots < 0 \quad (63)$$

的所有由 $f = \sum_k x_k e_k \in X(t)$ 組成的集合。這裡 $\lambda_j = \lambda_j(t)$ 。由(56)式知有 $s \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ，使

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_s < 0 \leq \lambda_{s+1} \leq \lambda_{s+2} \leq \cdots \rightarrow \infty, \quad (64)$$

亦即 λ_s 為剛跨過 0 變成負數的 $A(t)$ 的特徵值。(63)式告訴我們，設

$$W(t) = \{x_{s+1} = x_{s+2} = \cdots = 0\},$$

亦即

$$W(t) = \left\{ f = \sum_{k=1}^s x_k e_k(t) \in X(t); x_k \in \mathbb{R} \right\}; \quad (65)$$

則

$$i(t) = \dim W(t) = s, \quad (66)$$

所以 index $i(t)$ 表示 $X(t)$ 中所有負特徵值 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 的個數。

Step 2. (nullity) 由定義 2 (59)式，知 nullity $\nu(t)$ 其實是 $X(t)$ 中所有獨立 Jacobi 場的個數。最早當 $t = 0$ 時，由假設

$$\lambda_k(0) > 0, \quad \forall k, \quad (67)$$

知：當 $t = 0$ 時，沒有（非零的）Jacobi 場，因為 Jacobi 場 φ 表成： $\varphi = \sum_k a_k e_k \in X(0)$ 時，必需滿足

$$B(\varphi, g) = 0, \quad \forall g \in X(0). \quad (68)$$

但此時 $B(\varphi, \varphi) = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \cdots > 0$ 。現今當 t 增大，例如在 $\lambda_1(t) = 0$ 時，出現一個 Jacobi 場 $e_1(t)$ ，此因

$$B(t)(e_1(t), g) = \lambda_1(t) \langle e_1(t), g \rangle, \quad \forall g \in X(t), \quad (69)$$

繼而當 $\lambda_2(t) = 0$ 時，又出現第二個獨立的 Jacobi 場 $e_2(t)$ ，此因

$$B(t)(e_2(t), g) = \lambda_2(t) \langle e_2(t), g \rangle = 0, \quad \forall g \in X(t). \quad (70)$$

如此證知：當 t 增大到： $\lambda_k(t)$ 變成

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_s \leq 0 < \lambda_{s+1} \leq \lambda_{s+2} \leq \cdots \rightarrow \infty. \quad (71)$$

的樣子時，曾出現過的獨立 Jacobi 場總個數是 s 個。換句話說，我們得知：

$$i(t^+) = s = \sum_{0 \leq t < t^+} \nu(t), \quad (72)$$

其中 $t^+ = t + \varepsilon$ 表示比 t 大微量 $\varepsilon > 0$ 的數，因為當 t 增加一點點變成 t^+ 時， $\lambda_s(t^+) > \lambda_s(t)$ ，故(64)式成立。[在 §6 我們將補證 $\lambda_k(t)$ 嚴格下降。]

Step 3. 由(72)式，考慮 $0 \leq \alpha < \beta \leq b$ ，顯然所求(62)式成立。 ■

注記 4 定理 5 的假設「 $\lambda_k(0) > 0, \forall k$ 」，事實上可以不用，因為證明中 *Step 2* (72)式雖然需要這假設，但是 *Step 3* 中考慮到 $i(\beta) - i(\alpha)$ 時，這假設可以丟棄，而逕得(62)式。

注記 5 (56)式的寫法，自然把特徵值的重數計算在內。例如 $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \lambda_6 \cdots$ ，表 $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$ ，則特徵值 λ 的重數為 2，其相應的特徵函數構成 2 維的函數空間：

$$\{f = ae_2 + be_3; a, b \in \mathbb{R}\}. \quad (73)$$

討論(64)，(71)兩式時， $\lambda_s \leq \lambda_{s+1}$ 。這是自然的，因為特徵值相同的特徵函數都一起屬於 $W(t)$ ，或一起不屬於 $W(t)$ ；同樣的，特徵值為 0 的特徵函數，也一起算入 $\ker B$ 中。

§5 cmc 曲面上 Jacobi 場的分佈

現今我們來回答本章的主要問題。

給定 \mathbb{R}^{n+1} 中的 cmc 曲面 M^n 。對於我們所考慮的遞增 domain $D(t) \subset M^n$, $0 \leq t < b$, 我們必須保證 L 的特徵值 $\lambda_k(t)$ 對 t 是連續 (見下文例 2); 同時我們希望 $\mathcal{D} \equiv \{D(t); 0 \leq t < b\}$ 的定義包含一些應該考慮的狀況 (如下文例 3)。

例 2 先考慮最簡單的情況, $D(t) \subset \mathbb{R}^1$ 。設

$$D(t) \equiv D_-(t) \cup D_+(t), \quad 0 \leq t < 1, \quad (74)$$

其中 $D_-(t) =$ 區間 $(-\pi, \pi(t-1))$, $D_+(t) =$ 區間 $(\pi(1-t), \pi)$ 。又定義 $D(1) = (-\pi, \pi)$, 在這狀況下, $Lf = -\Delta_M f - \|B\|^2 f = -f''$ 。當 $0 < t < 1$ 時, 知

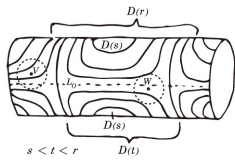
$$u_1(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{t}(x - \pi(t-1)), & \text{當 } x \in D_-(t), \\ \sin \frac{1}{t}(x + \pi(t-1)), & \text{當 } x \in D_+(t), \end{cases} \quad (75)$$

為 $L(t)$ 在 $D(t)$ 上的第一特徵函數, 而相應的第一特徵值 $\lambda_1(t) = 1/t^2$ 。但當 $t = 1$ 時, $u_1(x) = \cos(x/2)$ 則為第一特徵函數, 其相應的第一特徵值 $\lambda_1(1) = 1/4$ 。得

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \lambda_1(t) = 1 \neq \frac{1}{4} = \lambda_1(1). \quad (76)$$

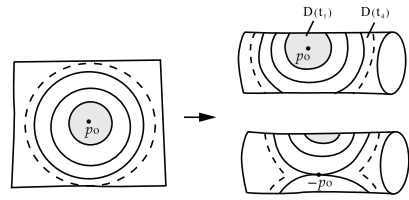
此即, $\lambda_1(t)$ 對於 t 並不連續。

例 3 設 $M^2 = \{(x, e^{iy}); x, y \in \mathbb{R}^1\} \subset \mathbb{R}^1 \times S^1$ 為 \mathbb{R}^3 中的圓柱面。設 $p_0 = (0, 1) \in M^2$, $D(0) = \{p_0\}$, $D(t)$ 為 M^2 上以 p_0 為圓心, 以 t 為半徑的測地圓盤, $0 \leq t < \pi$ 。當 $t = \pi$ 時, $D(t)$ 在 $-p_0$ 那一端黏合, 此後 (即 t 繼續增大), $D(t)$ 為部分重疊的測地圓, 只是就其拓撲來說, 在 M^2 上, $D(t)$ 已成為「筒狀 (cylindric)」, 見圖 30.5。雖然在 $t \geq \pi$ 之後, $D(t)$



(在 §6 引理 A 與 §7.4 中，這例子有關鍵性的角色)

圖 30.4



$D(t_1) \subset \dots \subset D(t_2)$
 $D(t_i) = \text{disk}, i=1, 2, 3; D(t_i) = \text{ring}$

圖 30.5

的拓撲已改變，且其邊界也非「勻滑 (smooth)」，但 $\lambda_k(t)$ 仍然對 t 連續。這狀況是值得涵蓋在我們定義下的遞增族 $\mathcal{D} = \{D(t) \subset M^2; t \in [0, b)\}$ 。

定義 4 設 $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ 為 cmc 曲面。考慮 $\mathcal{D} = \{D(t) \subset M^n; 0 \leq t \leq b\}$ ，其中每一個 domain $D(t)$ 為 relatively compact；又 $p_0 \in M^n$ ， $D(0)$ 為 p_0 點的一個小鄰域，且

$$s < t \Rightarrow D(s) \subsetneq D(t), \tag{77}$$

我們要求 $D(t)$ 為 C^∞ -變形 (smooth deformation)，此即，對任意固定 $t \in [0, b]$ ，有

$$\overline{D(t)} = \xi(\overline{\Omega} \times t), \tag{78}$$

其中 $\overline{D(t)}$ 表 $D(t)$ 在 M^n 中的 closure，而 $\xi : \overline{\Omega} \times [0, b] \xrightarrow{C^\infty} M^n$ ， $\overline{\Omega}$ 為 n 維 C^∞ -流形，其邊界 $\partial\Omega$ 緊緻，且 $\xi|_{\overline{\Omega} \times t}$ 為 diffeomorphic into。此時稱 \mathcal{D} 為 C^∞ -遞增面域族 (smooth continuum)，簡稱 C^∞ -遞增族 (smooth continuum)。

注意例 2 與 3 都不是 C^∞ -遞增族，本節 §5 我們先討論為 C^∞ -遞增族。到 §6-§7，再進一步考慮更一般的 C^0 -遞增族，用來涵蓋像例 3 這種可以改變 $D(t)$ 拓撲的普遍狀況。

現在我們要利用 $\lambda_k(t)$ 對 t 的連續性及其嚴格下降的性質 [§6 會有完整的證明]，加上 Morse index 定理，來回答 §3 的主要問題。

對於 M^n 上給定的 C^∞ -遞增族 $\mathcal{D} = \{D(t); 0 \leq t \leq b\}$ ，考慮 L 在

$D(t)$ 上的特徵值 $\lambda_j = \lambda_j(t)$,

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \cdots \rightarrow \infty, \quad (79)$$

$Lu_k = \lambda_k u_k$, $u_k = u_k(t) \in \mathcal{F}(D(t))$ 為相應的特徵函數。今重組 (re-group) $\{\lambda_j\}$, 改寫成

$$\bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_3 < \bar{\lambda}_4 < \cdots \rightarrow \infty, \quad (80)$$

其中 $\bar{\lambda}_k$ 彼此相異, 而 $\bar{\lambda}_k$ 的重數 (multiplicity) 為 $m_k = m_k(t)$ 。

為求精確, 我們修改第 §3, (36)式的符號, 使 $t_k \in [0, b)$ 表

$$D(t_k) = D[\bar{\lambda}_k = 0], \quad (81)$$

亦即: 當 t 增大, $\bar{\lambda}_k(t)$ 連續而且嚴格下降, 當 $\bar{\lambda}_k(t) = 0$ 時的 t , 就記為 t_k 。即

$$\bar{\lambda}_k(t_k) = 0. \quad (82)$$

這樣一來 t_k 也彼此相異, 而呈 $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ 。我們將以 t_1, t_2, t_3, \cdots 作為討論 Jacobi 場出現的參考座標:

設 $D(t_k)$ 上相應於 $\bar{\lambda}_k(t_k) = 0$ 的特徵函數為

$$u_{k,1}, u_{k,2}, u_{k,3}, \cdots, u_{k,m_k}. \quad (83)$$

其中 $u_{k,j}$ 為 (彼此) 線性獨立 (linearly independent), m_k 表其重數。又表

$$n_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_k. \quad (84)$$

對任何 $t \in [0, b)$, 表 ℓ 使

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \cdots \leq \lambda_\ell < 0 \leq \lambda_{\ell+1} \leq \cdots \rightarrow \infty, \quad (85)$$

其中 $\lambda_j = \lambda_j(t)$, $\forall j = 1, 2, 3, \cdots$, 則有

$$i(t) = \ell. \quad (86)$$

注意 $\ell = \ell(t)$ 。

設 $t_k^+ = t_k + \varepsilon$ ，其中 $\varepsilon > 0$ 為微小量。容易看出當 $t = t_k^+$ 時，有：

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \dots \leq \lambda_{n_k} < 0 < \lambda_{n_k+1} \leq \lambda_{n_k+2} \leq \dots \rightarrow \infty, \tag{87}$$

其中 $\lambda_j = \lambda_j(t_k^+)$, $\forall j$ 。這就是說，當 t 從 0 開始，增加到 t_k^+ 之時，連續由正數跨過 0 變成負數的特徵值（不一定相異），總共有 n_k 個。

定理 6 給定 cmc 曲面 $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ 及 M^n 上一個 C^∞ -遞增面域族 $\mathcal{D} = \{D(t) \subset M^n\}$ 。設 $i(t)$ 與 $\tilde{i}(t)$ 按序分別為 L 在 $\mathcal{F}(D)$ 上，與 \tilde{L} 在 $\mathcal{G}(D)$ 上的 Morse index，其中 L 與 \tilde{L} 定義如(3)式與(49)式，則

$$i(t) - 1 \leq \tilde{i}(t) \leq i(t), \quad \forall t \in (0, b]. \tag{88}$$

注記 6 而當下文 $[\mathbf{G}_k]$ 成立時，不難導得：

$$\tilde{i}(t_k^+) = i(t_k^+) - 1 = \ell - 1. \tag{89}$$

此 $\ell = \ell(t_k^+) = n_k$ ，如(85)、(87)兩式所給定。

$[\mathbf{G}_k]$ ：對於在 $D(t_k)$ 上的 L ，存在相應於特徵值 $\bar{\lambda}_k$ （或記 λ_{n_k} ）的特徵函數 u_j ，使 $\int_{D(t_k)} u_j \neq 0$ ，亦即 $u_j \notin \mathcal{G}(D(t_k))$ 。

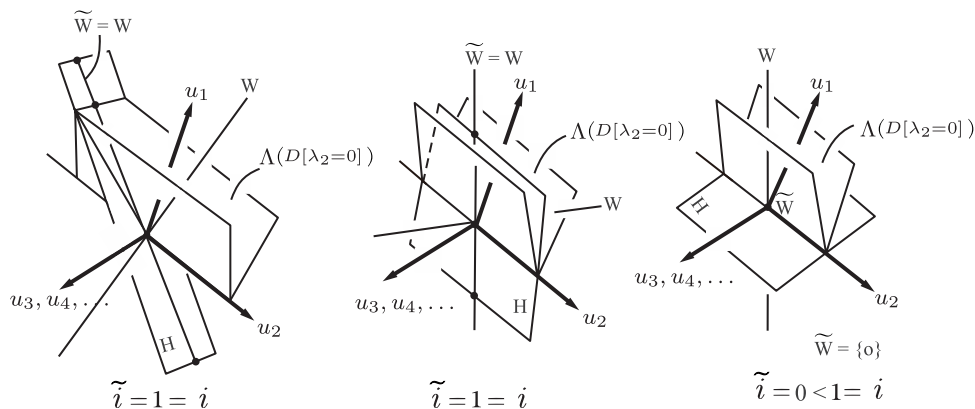


圖 30.6: 三種情況

定理 6 與下文主要定理 (定理 7), 亦可施用在 Sobolev 空間 $W_0^1(D(t))$ 上。

定理 6 的證明

Step 1. 由 index 的定義(61)式, 知

$$i(t) = \dim W; \quad \tilde{i}(t) = \dim \tilde{W}. \quad (90)$$

其中 W 與 \tilde{W} 分別為包含於 $\Lambda_-(t)$ 與 $\tilde{\Lambda}_-(t) \equiv \Lambda_-(t) \cap \mathcal{G}(D)$ 的最大線性空間。但 $\tilde{W} \subset W$, 故 $\tilde{i}(t) \leq i(t), \forall t \in [0, b)$ 。此即(88)式之後半部。另外, 由定義知, $\Lambda_-(t)$ 由 0 點與所有 $f = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots \in \mathcal{F}(D(t))$ 組成, 其中

$$I(f) = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \cdots + \lambda_\ell a_\ell^2 + \cdots < 0. \quad (91)$$

設 $W_\ell \equiv \text{linear span}\langle\{u_1, u_2, \cdots, u_\ell\}\rangle$, 顯然 $W_\ell \subset \Lambda_-(t)$ 。

Step 2. $\Lambda_-(t)$ 中任何最大線性空間 V 須包含 W_ℓ , 因為 V 與 W_ℓ 的 linear span 仍然包含於 $\Lambda_-(t)$ 。所以證明 W_ℓ 為在 $\Lambda_-(t)$ 中的最大性 (maximality), 便知 $i(t) = \ell$ 。理由很直接: 假設 W_ℓ 在 $\Lambda_-(t)$ 中不是最大, 則存在 $h = h_1u_1 + h_2u_2 + \cdots \notin W_\ell$ 使得

$$g + h \in \Lambda_-(t), \quad \forall g \in W_\ell. \quad (92)$$

今選 $g = -h_1u_1 - \cdots - h_\ell u_\ell$, 則

$$g + h = h_{\ell+1}u_{\ell+1} + h_{\ell+2}u_{\ell+2} + \cdots \neq 0, \quad [\text{因 } h \notin W_\ell],$$

而得 $I(g + h) = \lambda_{\ell+1}h_{\ell+1}^2 + \lambda_{\ell+2}h_{\ell+2}^2 + \cdots > 0$, 違反(92)式, 得矛盾。故 W_ℓ 為 $\Lambda_-(t)$ 中的最大線性空間, 而知 $i(t) = \dim W_\ell = \ell$ 。

Step 3. 注意在 $D(t)$ 上, $u_1 > 0, \forall t > 0$, 因此 $\int_D u_1 \neq 0$, 即 $u_1 \notin \mathcal{G}(D(t))$, 而且 $W_\ell \not\subset \mathcal{G}(D(t))$, 其中 $\ell = \ell(t), \forall t > 0$ 。我們來製作 W_ℓ 中的某 hyperplane V , 使 $V \subset \tilde{\Lambda}_-(t)$ 中。考慮

$$g = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_\ell u_\ell,$$

其中 a_2, a_3, \dots, a_ℓ 任意，而

$$a_1 = \left(-a_2 \int_D u_2 - \dots - a_\ell \int_D u_\ell \right) / \int_D u_1, \tag{93}$$

則 $\int_D g = 0$ ，即 $g \in \mathcal{G}(D(t))$ 。故 $g \in \tilde{\Lambda}_-(t)$ 。設 V 為所有這些 g 的全體，則 $\dim V = \ell - 1, V \subset \tilde{\Lambda}_-(t)$ 。因此 $\tilde{i}(t) \geq \dim V = \ell - 1 = i(t) - 1$ 。證得(88)式。

定理 7 沿用定理 6 的符號。考慮在 $D(t)$ 上的 Jacobi 場， $t \in [0, t_k]$ 。其(線性)獨立的總個數記為 $\mu[0, t_k]$ ，則

$$n_k - 1 \leq \mu[0, t_k] \leq n_k. \tag{94}$$

又當 $[G_k]$ 成立時，有

$$\mu[0, t_k] = n_k - 1. \tag{95}$$

證明： 對 $t \in [0, b)$ ，考慮(85)式，由定理 6，知 $i(t) = \ell$ ，且 $\ell - 1 \leq \tilde{i}(t) \leq \ell$ 。由於 $\lambda_j = \lambda_j(t)$ 對 t 是連續的，當 t 從 0 增到 t_k ， $\lambda_j(t)$ 遞減而跨過 0，變成負數，iff $j = 1, 2, \dots, \ell$ 。今考慮 $t = t_k$ ，則

$$\ell = i(t_k^+) = m_1 + m_2 + \dots + m_k = n_k, \tag{96}$$

故

$$n_k - 1 \leq \tilde{i}(t_k^+) \leq n_k. \tag{97}$$

將 Morse index 定理的原型，亦即定理 5 [見下文注記 7] 施作在 $\tilde{L} : \mathcal{G}(D) \dashrightarrow \mathcal{G}(D)$ 上，知

$$\mu[0, t_k] = \sum_{0 \leq t \leq t_k} \tilde{\nu}(t) = \sum_{0 \leq t < t_k^+} \tilde{\nu}(t) = \tilde{i}(t_k^+), \tag{98}$$

其中 t_k^+ 足夠接近 t_k 。合併上兩式，即(97)與(98)，得知(94)式成立。今當 $[G_k]$ 成立時，由定理 6 及(98)式，立即證得(95)式。 ■

注記 7 下文 §6 中我們將把定理 5 Morse index 定理的原型修改為定理 9，使它可以適用於定理 7 與隨後主要定理（定理 8）的證明，並稱定理 9 為「Morse index 定理的 cmc 形式」。

注記 8 在 C^∞ -範疇中，把定理 5 施作在 \tilde{L} 上的一個困難是： $\mathcal{G}(D)$ 並非 Hilbert，而且對 $t < s$ ，因 $D(t) \subset\subset D(s)$ 的假設， $\mathcal{G}(D(t)) \not\subset \mathcal{G}(D(s))$ ，所以不符合定理 5 中 $X(t) \subset X(s)$ 的要求。解決這個困難的方法，同樣是提升到 Sobolev 範疇，改以考慮一階 Sobolev 空間 $H_t \equiv H(D(t))$ 。這時便有 $H_t \subset H_s$ ，而且可以把 H_t 全看成 H_b 的子空間， $\forall t \leq b$ 。這樣一來，此前在 C^∞ -範疇中有些曖昧的疑點就變得嚴謹 (rigorous)，而沒有瑕疵了。

定義 5 給定區間 $I \subset [0, b]$ ，考慮在 $D(t)$ 上出現的獨立 Jacobi 場， $t \in I$ ，表其總個數為 $\mu(I)$ 。這裡的「獨立」，是「線性獨立」的簡稱。以下皆同。

注記 9 為了考慮 $\mu(I)$ ， $I \subset [0, b]$ ，所謂在 $D(t)$ 上為線性獨立的 Jacobi 場， $t \in I$ ，必須屬於同一個函數空間中， $\mu(I)$ 才能清楚定義。在下文 §6-§7 中我們將考慮 Sobolev 空間 $W_0^1(D(b))$ 。對於 $D(t)$ 上的 Jacobi 場 u ，若 $t < b$ ，則把 u 看成 $W_0^1(D(b))$ 中的 Sobolev 函數，使 u 在 $D(t)$ 界外（即 $D(b) - D(t)$ 上），取值為 0。

現今回來說明 $D(t)$ 上的 Jacobi 場在 t 軸上的分佈。在這裡，我們把 t_1, t_2, t_3, \dots 當作參考點，來說明 $D(t)$ 上的 Jacobi 場在 t 軸上的分佈情形。以下的結果是例 1 及圖 30.3 在二維以上的推廣，也是本章的**主要定理**：

定理 8 (Huang-Lin) 設 $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ 為常均曲率曲面 (cmc hypersurface)。考慮 $\mathcal{D} = \{D(t) \subset M^n; 0 \leq t \leq b\}$ 為一 C^∞ -遞增族。甚或進一步為下節 §6 即將定義的 C^0 -遞增族 [見定義 11]。給定 $k > 1$ ，存在 domain

$D(t)$ ，其上有（非零的）Jacobi 場，使得

$$D[\lambda_{k-1} = 0] \subset D(t) \subset D[\lambda_k = 0]. \tag{99}$$

更準確的說，考慮在 $D(t)$ 上出現的獨立 Jacobi 場，其中 $t \in [t_{k-1}, t_k]$ ，則其總個數 $\mu[t_{k-1}, t_k]$ 滿足：

$$0 < m_{k-1} + m_k - 1 \leq \mu[t_{k-1}, t_k] \leq m_{k-1} + m_k + 1. \tag{100}$$

注意當 $k = 1$, $\mu[0, t_1] = 0$ 。這主要定理進一步對更廣義的 C^0 -遞增族 [見 §6 定義 11] 仍然成立。

定理 8 若只處理 C^∞ -遞增族，情況簡單得多。因為 C^∞ -遞增族中的 domain $D(t)$ 之邊界為 smooth，而且彼此 diffeomorphic, $\forall t \in [0, b]$ 。利用 Frid-Thayer [F-T] 所建立的 Morse index 抽象形式，不難得到定理 8 在 C^∞ -遞增族情況時的證明。至於，對進一步的 C^0 -遞增族，定理 8 處理起來就遠為複雜。其實這是本章的論證在技術上較艱鉅的地方，因為 (i) $D(t)$ deformation 的過程必須非常講究；(ii) $D(t)$ 是廣義的 Lipschitz domain，處理起來複雜得多；(iii) $D(t)$ 的 topological type 可以隨 t 而變，這使得 stability operator L 與 \tilde{L} 的特徵值要隨 t 連續，變成了一個相當 non-trivial 問題。這些將在 §6 與 §7 中慢慢處理，Observation Z 與引理 A 是關鍵所在。這些工作完成，已到本張該結束的地方，屆時定理 8 才證明完全。

證明： 將定理 5（即 Morse index 定理的原型）施用在 \tilde{L} 上，其中 $D = D(t_k)$ 。得

$$\mu[t_{k-1}, t_k] = \sum_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \tilde{\nu}(t) = \sum_{t \in [t_{k-1}, t_k^+]} \tilde{\nu}(t) = \tilde{i}(t_k^+) - \tilde{i}(t_{k-1}), \tag{101}$$

其中 $t_k^+ > t_k$ ，且夠接近 t_k 。但由定理 7 及(97)式，知 $n_k - 1 \leq \tilde{i}(t_k^+) \leq n_k$ ，又 $n_{k-2} - 1 \leq \tilde{i}(t_{k-1}) \leq n_{k-2}$ 。故

$$\mu[t_{k-1}, t_k] \leq n_k - (n_{k-2} - 1) = (m_{k-1} + m_k) + 1. \tag{102}$$

此即(100)式的右側不等式。同理可得其左側不等式。 ■

注意 $\lambda(t)$ 與 $\tilde{\lambda}_k(t)$ 對 t 連續，而且嚴格下降，這些事實的證明，是這個主要定理 8 最困難的部分，也是本章最艱難的核心工作。上述簡短的證明預先假定這些事實成立。至於這些事實是否成立？什麼時候成立？隨後將在 §6 與 §6 仔細剖析。

注記 10 與定理 8 的證明同理，易知

$$m_k - 1 \leq \mu(t_{k-1}, t_k] \leq m_k + 1, \quad (103)$$

$$m_{k-1} - 1 \leq \mu[t_{k-1}, t_k) \leq m_{k-1} + 1, \quad (104)$$

且

$$m_k - 1 \leq \mu(t_k) \leq m_k + 1, \quad (105)$$

這裡 $\mu(t_k) \equiv \mu(\{t_k\})$ ，表在 $D(t_k)$ 上的獨立 Jacobi 場的總個數。

與定理 8 的證明同樣的手法，容易證明下列兩個衍理：

衍理 1 給定 $k > 1$ ，在 (t_{k-1}, t_k) 上最多只有一個 Jacobi 場，此即

$$\mu(t_{k-1}, t_k) \leq 1 \quad (106)$$

衍理 2 給定 $k > 1$ ，設在 $D(t_k)$ 上的獨立 Jacobi 場，其個數 $\mu(t_k) > m_k$ ，則在 $(t_{k-1}, t_k) \cup (t_k, t_{k+1})$ 上沒有 Jacobi 場，此即

$$\mu((t_{k-1}, t_k) \cup (t_k, t_{k+1})) = 0 \quad (107)$$

回顧 §3 例 1，即 $\dim M = 1$ 的情況，定理 8 及其後的衍理 1 與 2 都正確無誤，請看圖 30.3，這樣的結論一目瞭然。注意其中 l_1, l_2, l_3, \dots 等即為 Jacobi 場出現的位置。在 [H-L] 中，我們還可以看到二維的例子。

§6 Sobolev 架構

對於此前在 smooth 架構中探討的問題，我們將把它們擴充到 M^n 上的“廣義” Lipschitz domain $D(t)$ 之上去討論，並同時處理其上 Sobolev 變分

函數。考慮「廣義 Lipschitz domain」的好處是 $D(t)$ 的 topological type 可以因 t 而改變，所以隨著 t 增加， $D(t)$ 能以各種形式伸向 M^n 的遠方遍及大域。

§6.1 (C^0 -遞增族)

給定 M^n 中的一個 domain D 。設 $f \in L^2(D)$ ，其一階弱微分 Df 存在且 $\in L^2(D)$ ，稱 f 為組成 $W^{1,2}(D)$ 的 Sobolev 函數。考慮 $\mathcal{F}(D)$ 與 $\mathcal{G}(D)$ 擴充到 $W^{1,2}(D)$ 中的兩個 subspaces

$$E(D) := \mathcal{F}(D) \cap W^{1,2}(D) \text{ 在 } W^{1,2}(D) \text{ 中的 closure,} \quad (108)$$

$$H(D) := \mathcal{G}(D) \cap W^{1,2}(D) \text{ 在 } W^{1,2}(D) \text{ 中的 closure,}$$

其中 $\mathcal{F}(D)$ 與 $\mathcal{G}(D)$ 的定義如本章 §1, (1)式。這樣的擴充，使得我們能把片段勻滑 (piecewise smooth) 的函數，如定理 2 中的 g 與 ψ ，納入變分函數的範圍。另一個顯然的好處是： $E(D)$ 與 $H(D)$ 為 Hilbert 空間，因此完備性 (completeness) 可以自由運用。更進一步，對於遞增族 $D \equiv \{D(t); 0 \leq t \leq b\}$ [見定義 9]，我們可以把 $H(D(t))$ 中的函數 u ，看成在 $H(D(b))$ 中，方法是把 u 的定義域擴充到 $D(b)$ 上，而在 $D(b) - D(t)$ 上取 u 值全等於 0。用這樣的觀點，所有 $D(t)$ 上的變分函數都可在 $H(D(b))$ 中一起考慮，這會使我們的討論方便得多。例如 unstable cone $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}(D(t))$ 隨著 t 增加而 r 「漲大」，這句話的定義就變得明確。又例如當 $r > t$ ， $D(t)$ 上的 Jacobi 場，可以看成 $H(D(r))$ 上的元素，這樣也使得我們隨後相關的語言不再模糊。

爲了節省篇幅，本章下文我們將自由簡化符號，如 $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(D)$ ， $E \equiv E(D)$ ， $H \equiv H(D)$ ， $H_t \equiv H(D(t))$ ， $\Lambda_t \equiv \Lambda(D(t))$ ， $H_t \subset H_b, \dots$ 。

定義 6 \mathbb{R}^n 中一個 simple domain U ，意指 \mathbb{R}^n 中一個與 n -ball $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; |\mathbf{x}| \leq 1\}$ 可微同構 (diffeomorphic) 的 open set。一個 Lipschitz simple domain (U, Γ, V) 是一個 simple domain U ，抽象的附加 $\Gamma \subset \partial U$ ，

$$\Gamma = \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^n; x \in V\}, \quad (109)$$

並附加 H^{n-1} 中的一個與 $(n - 1)$ -ball 可微同構的 open set V ，其中 $u = u(x)$ 為 Lipschitz 函數， H^{n-1} 為 \mathbb{R}^n 中的一個 hyperplane。

定義 7 M^n 上的一個 domain D 為 relatively compact，意指 D 在 M^n 中的 closure \bar{D} 為 compact。當我們說， D 是一個廣義的 (generalized) Lipschitz domain，意思是 $\forall p \in \partial D$ ， p 有 M^n 中的坐標鄰域 (\tilde{U}_p, φ) ，其中 φ 為 \tilde{U}_p 上的 coordinate map，使得

- (i) $D \cap \tilde{U}_p = \bigcup\{U_1, U_2, \dots, U_\gamma\}$ ，而每個 U_j 都抽象的附加 $\Gamma_j \subset \partial U_j \cap \partial D$ ；
- (ii) $\forall j = 1, 2, \dots, \gamma$ ， (U'_j, Γ'_j, V'_j) 組成一個 \mathbb{R}^n 中的 Lipschitz simple domain，

其中 $U'_j := \varphi(U_j)$ ， $\Gamma'_j := \varphi(\Gamma_j)$ ，而 V'_j 則為 \mathbb{R}^n 中某 hyperplane H_j^{n-1} 的 open set。

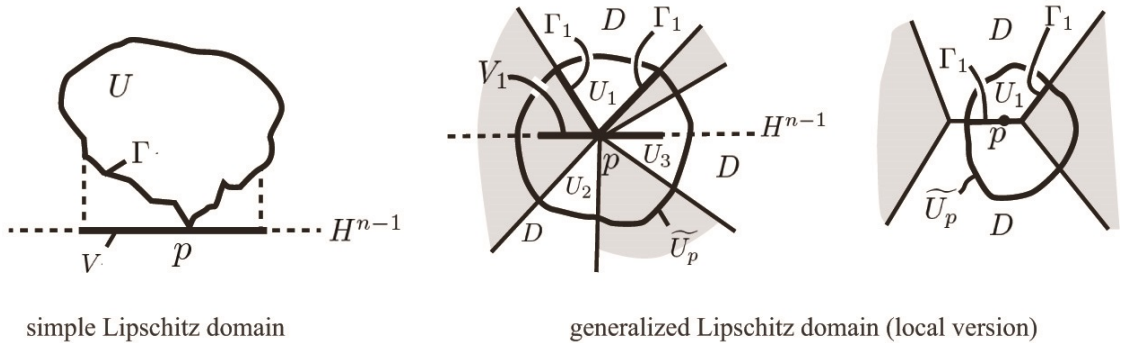


圖 30.7

在下文中，我們經常把 (U', Γ', V') 通由 φ 的 pull-back (U, Γ, V) 視為 M^n 上的一個 Lipschitz simple domain。在定義 7 中，我們還要求：

- (iii) 可以取 Lipschitz 常數 $L > 0$ ，使它與 $p \in \partial D$ 無關。

更準確的說，存在常數 $L > 0$ ，使得 $|u(x) - u(y)| \leq L \cdot |x - y|$ ，其中 $x = \varphi(p)$ ， $y = \varphi(q)$ ， $\forall x, y \in V'$ 。

由於 M^n 中的 metric 必須被列入考慮，我們可以規定 $\varphi = \text{Exp}^{-1}: \widetilde{U}_p \rightarrow T_p M$ ，其中 Exp 為 M^n 在 p 點的 exponential map。因此 V' 上的 metric $|x - y|$ 由 $V' \subset H^{n-1} \subset T_p M = \mathbb{R}^n$ 所界定。也因此 (iii) 所規定的條件明確。

爲了簡化語言，以下將略掉“廣義的”這個字眼，逕稱 generalized Lipschitz domain 爲 Lipschitz domain。像 M^n 中的 D 或 $D(t)$ ，都視爲 (generalized) Lipschitz domain。

現在來定義 M^n 上的 C^0 -遞增族 D 。

定義 8 設 X 爲一個 metric 空間， $K \subset X$ 爲 relatively compact。給定常數 $\alpha \geq 0$ ，定義 K 的 α -tubular 鄰域爲

$$K^\alpha := \{x \in X; d(x, K) \leq \alpha\}. \quad (110)$$

對於 X 中兩 relatively compact 子集 K 與 L ，定義 Hausdorff 距離 d^H 爲

$$d^H(K, L) = \inf\{\alpha \geq 0; K \subset L^\alpha \text{ 且 } L \subset K^\alpha\}. \quad (111)$$

定義 9 給定 $D \equiv \{D(t) \subset M^n; t \in [0, b]\}$ ，其中 $D(t)$ 爲 Lipschitz domain。如果

$$s < t \implies D(s) \subsetneq D(t), \quad \forall s, t \in [0, b]. \quad (112)$$

我們說 D 是一個 M^n 上的遞增面域族，簡稱遞增族。

定義 10 給定一個遞增族 D 。若 $\forall \varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ 使得

$$|s - t| < \delta \implies d^H(D(s), D(t)) < \varepsilon, \quad (113)$$

其中 $s, t \in [0, b]$ ，我們稱 D 爲對 Hausdorff 距離 d^H 連續，或簡稱 D 爲 Hausdorff-連續。

本章中， \overline{D} 皆表 D 在 M^n 中的 closure。

定義 11 給定 D 為一遞增族。如果 $\forall t \in [0, b]$,

$$\partial(\overline{D(t)}) = \partial(D(t)), \quad (114)$$

更且

$$D(t) = \bigcup_{s < t} D(s), \quad \overline{D(t)} = \bigcap_{r > t} \overline{D(r)}, \quad (115)$$

我們說 D 為對 t set-continuous，此時也稱 D 為一個 \mathcal{C}^0 -遞增族 (\mathcal{C}^0 -monotone continuum)。以下我們經常考慮初始的狀態 $D(0)$ 為 M^n 上某個 p_0 點的一個小鄰域，此鄰域 $D(0)$ 為 subextremal。但這樣的考慮並非必要。注意(114)式等價於 $\text{Int } \overline{D(t)} = D(t)$ ，其中 Int 指內集 (interior)。

在 §7 中，我們將證明 set-continuity 蘊涵 (imply) “Hausdorff 連續”，反過來則不然。其證明已含於引理 A 細緻的證明之中。反例則參考在 §7.1 中幾個關鍵的例子。

設 $D \subset M^n$ 為 Lipschitz domain，而 $W^{k,2}(D)$ 表示：對 $\ell \leq k$ ， ℓ 階弱微分存在而且屬於 $L^2(D)$ 的所謂 Sobolev 函數所組成的空間。設

$$E^k \equiv E^k(D) := \mathcal{F}(D) \cap W^{k,2}(D) \text{ 在 } W^{k,2}(D) \text{ 中的 closure,} \quad (116)$$

$$H^k \equiv H^k(D) := \mathcal{G}(D) \cap W^{k,2}(D) \text{ 在 } W^{k,2}(D) \text{ 中的 closure.}$$

當 $k = 1$ ，我們已經在(108)式中，記 $E \equiv E^1$ ， $H \equiv H^1$ 。這兩個空間尤其是我們接著要仔細處理的對象。注意 $E^0 \equiv L^2(D)$ ，因為 $f|_{\partial D} = 0$ 的條件，在 $L^2(D)$ 中等於沒有限制。

又注意 H^2 在 $H \equiv H^1$ 中為稠密 (dense)。 H^1 在 H^0 中也稠密，而且是 compact embedding。這是 Sobolev 空間的一般定理，其依據還是第 23 章所述的 Rellich(緊緻) 定理。

§6.2 Sobolev 空間上的 \tilde{I}

今在 H 中考慮連續而對稱的 bilinear form

$$\tilde{I}(f, g) := \int_D Df \cdot Dg - \|B\|^2 fg, \quad \forall f, g \in H. \quad (117)$$

知存在 $\tilde{L} : H^2(D) \xrightarrow{\text{linear}} H^0(D)$ [稍後在注記 11 中詳述]，使

$$\langle \tilde{L}f, g \rangle = \int_D \tilde{L}f \cdot g = \tilde{I}(f, g), \quad \forall g \in H, \quad (118)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 為 $L^2(D)$ 中的內積，而

$$\tilde{L}f = -\Delta_M f - \|B\|^2 f - \frac{1}{|D|} \int_D Lf, \quad \forall f \in H^2(D). \quad (119)$$

這裡(118)式成立，是因有 $\int_D g = 0$ ，又與(??)式相仿，對 $f \in E^2(D)$ 定義

$$Lf := -\Delta_M f - \|B\|^2 f \in L^2(D). \quad (120)$$

這是沒有 volume constraint 的狀況。請回想(49)式，我們正在把 C^∞ -範疇相關的論述 [(49)-(51)式] 提升到 Sobolev 範疇來。

注記 11 對於沒有 volume constraint 的狀況，上述由(120)式所定義的 L ，可以看成

$$L : E^2(D) \rightarrow L^2(D) \quad (121)$$

的 continuous linear operator，其相應的 bilinear form

$$I : E(D) \times E(D) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (122)$$

為連續而且對稱，形式與(117)式相同，仍為

$$I(f, g) := \int_D Df \cdot Dg - \|B\|^2 fg, \quad \forall f, g \in E(D). \quad (123)$$

把 I 限制在 $H \subset E(D)$ 上時，有

$$I(f, g) = \tilde{I}(f, g), \quad \forall f, g \in H. \quad (124)$$

上文中為什麼 $\tilde{L} : H^2 \rightarrow H^0$ ？關鍵在(119)式右端扣掉了常數 $\frac{1}{|D|} \int_D Lf$ ，我們才有 $\tilde{L}f \in H^0, \forall f \in H^2$ 。這事需要釐清：依 H^0 的定義， H^0 是 \mathcal{G} 在 $L^2(D)$ 的 closure。所以我們必須確認有 $\tilde{w}_j \in \mathcal{G}$ 使得 $\tilde{w}_j \rightarrow \tilde{L}f$ 於

$L^2(D)$ 中。驗證如下：給定 $f \in H^2$ ，有 $\varphi_j \in \mathcal{G}$ 使得 $\varphi_j \rightarrow f$ 於 $E^2(D)$ 中，故

$$\int_D Lf = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_D L\varphi_j \quad (125)$$

且 $\tilde{L}\varphi_j \rightarrow \tilde{L}f$ 於 $L^2(D)$ 中。又

$$\tilde{L}\varphi_j = L\varphi_j - \frac{1}{|D|} \int_D L\varphi_j \in C^\infty(D), \quad (126)$$

故 $\int_D \tilde{L}\varphi_j = 0$ 。根據 $\tilde{L}\varphi_j$ ，容易製作 $\tilde{w}_j \in \mathcal{G}$ ，使它 L^2 -逼近於 $\tilde{L}\varphi_j$ 。知 $\tilde{L}f \in H^0$ 。

注記 12 對於 $u \in H$ ，當我們寫下有關 $\tilde{L}u$ 的方程，例如寫

$$\tilde{L}u = \lambda u, \quad \forall u \in H, \quad (127)$$

時，它是弱方程，意指： $\forall g \in H$,

$$\langle \lambda u, g \rangle = \langle \tilde{L}u, g \rangle = \int_D Du \cdot Dg - \|B\|^2 ug = \tilde{I}(u, g). \quad (128)$$

與 Ch. 23 的做法一樣， \tilde{L} 有值譜分析的定理 [L 亦然]。不妨簡述如下：考慮 H 中的 unit sphere

$$S = \{f \in H; \|f\| = 1\}, \quad (129)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表 L^2 -norm。因 $\tilde{I}(f, f) = \|Df\|^2 - \|B\|^2\|f\|^2 \geq -\|B\|^2$ ， $\forall f \in S$ 。故 $\tilde{I}(f, f)$ 在 S 中有下界，今取

$$\tilde{\lambda}_1 \equiv \inf \left\{ \tilde{I}(f, f); f \in S \right\} \quad (130)$$

及 $\tilde{I}(f, f)$ 的 minimizing sequence $f_1, f_2, \dots \in S \subset H$ ，使

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{I}(f_j, f_j) = \tilde{\lambda}_1. \quad (131)$$

則因 $\tilde{I}(f_j, f_j)$ 有上界 $c \geq \tilde{\lambda}_1$ ，亦即

$$\|Df_j\|^2 = \tilde{I}(f_j, f_j) + \|B\|^2 \|f_j\|^2 < c_1, \quad (132)$$

知 $\{f_j\}$ 有收斂子序列，其極限記為 $u_1 \in S \subset H$ [見 Ch. 23 §7 Rellich 緊緻定理] 且 $\tilde{I}(u_1, u_1) = \tilde{\lambda}_1$ 。利用 Lagrange multiplier 方法，或仿 Ch. 23 §7 值譜分解定理的證明 *Step 5*，可得知：在 weak sense 下有 $\tilde{L}u_1 = \tilde{\lambda}_1 u_1$ ，亦即

$$\tilde{I}(u_1, g) = \langle \tilde{L}u_1, g \rangle = \tilde{\lambda}_1 \langle u_1, g \rangle, \quad \forall g \in H \quad (133)$$

所以 $\tilde{\lambda}_1$ 為 \tilde{L} 的第一特徵值，相應的 u_1 為第一特徵函數。仿 Ch. 23，又得特徵值 $\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \dots$ 及相應的 u_2, u_3, \dots ，使

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \rightarrow \infty. \quad (134)$$

且

$$\tilde{L}u_k = \tilde{\lambda}_k u_k, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, \quad (135)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_k &= \min \left\{ \tilde{I}(f, f); f \in S_k \right\} \\ &= \min_{V^k} \left(\max \left\{ \tilde{I}(f, f); f \in V^k \cap S \right\} \right) \end{aligned} \quad (136)$$

其中 $S_k \equiv \{f \in S; \langle f, u_j \rangle = 0, \forall j = 1, 2, \dots, k-1\}$; $V^k \subset H$ 為 k 維 linear subspace。這便是所謂「mini-max 原理」。引用 Ch. 23 §7 所談的 regularity 定理，知 $u_k \in C^\infty(D)$ ，理由是(135)式的係數皆 C^∞ 。

另外，與 Ch. 23 證明 Δ_M 有值譜定理的 *Step 7* 類似，我們可以證明 $\forall v \in H^0$ ， v 能在 H^0 中表成

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots, \quad \text{其中 } a_k = \langle v, u_k \rangle \in \mathbb{R}. \quad (137)$$

此即 $\{u_k\}$ 為 H^0 中的正交基。因為 \tilde{L} 比 Δ_M 的形式複雜一些，我們把這證明詳述於下：

注記 13 把上文施用在 \tilde{L} 上的論述，改放在 L 上，同樣我們可以得到 $L : E_0^2(D) \rightarrow L^2(D)$ 的特徵函數與特徵值 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ 。對 λ_k 來說，mini-max 原理 (136) 式仍然成立，只是 \tilde{I} 要換成 I ，而 S 是 $E(D)$ 中的 unit sphere。由於 $E(D)$ 中相應的 collection $\{V^k \subset E(D)\}$ 包含 $\{V^k \subset H\}$ ，故

$$\lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k. \quad [\text{注意有(124)式成立}] \quad (143)$$

注記 14 [Regularity 定理] L 與 \tilde{L} 的特徵函數 u_k 必然 smooth，亦即 $u_k \in C^\infty$ 。爲什麼？一般時候，我們有橢圓 PDE 的 regularity 定理，引述如下：設 $u \in W_0^{1,2}(D)$ 爲橢圓 PDE：

$$D_i(a^{ij}D_j u) = F \quad (144)$$

的弱解， $a^{ij} \equiv a^{ij}(x) \in C^{k+1}(D)$ ，而 $F = F(x) \in W^{k,2}(D)$ ， $x \in D$ ，則 $u \in W^{k+2,2}(D)$ 。以我們正在考慮的 \tilde{L} [見(119)式] 爲例，若有 $\tilde{L}u = \tilde{\lambda}_k u$ [如(135)式]：

$$\tilde{L}u = -D_i D_i u - \|B\|^2 - \frac{1}{|D|} \int_D Lu = \lambda u \quad (145)$$

可視 $F(x) \equiv \|B\|^2 + \frac{1}{|D|} \int_D Lu + \lambda u \in W^{1,2}(D)$ ，這裡 $k = 1$ 。於是 $u \in W^{3,2}(D)$ 。反覆運用這 regularity 定理，可知 $u \in W^{\ell,2}(D)$ ，無論 ℓ 多大。事實上，當 $F(x) \in C^\infty(D)$ 時，自然也有

$$u \in C^\infty(D). \quad (146)$$

爲什麼？這需借助著名的 Sobolev embedding 定理，這定理是說：Sobolev 函數「弱可微」越多階，它存在的強微分也越多階，亦即：

$$W^{k,2} \subset C^m(D), \quad (147)$$

只要 k 與 m 的關係滿足 $0 \leq m < k - \frac{n}{2}$ ， $n = \dim D$ 。今 $u \in W^{\ell,2}(D)$ ，因爲 ℓ 可以任意大，即

$$u \in C^\infty(D)$$

得證(146)，故 $u_k \in C^\infty$ 。這類有趣而且重要的 regularity 定理⁴，我們還會反覆使用。

§6.3 Morse index 定理的 cmc 形式

考慮 cmc 曲面 M^n 上的 C^0 -遞增族 $\mathcal{D} \equiv \{D(t); 0 \leq t \leq b\}$ ，隨後在 §6.4 我們將證明 $\tilde{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_k(D(t))$ 與 $\lambda_k = \lambda_k(D(t))$ 對 t 皆連續，而且嚴格下降。這裡先來建立：

定理 9 (Morse index 定理的 cmc 形式) 給定 \mathbb{R}^{n+1} 中 cmc 曲面 $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ ，及 M^n 上的 C^0 -遞增族 \mathcal{D} 。考慮 Sobolev space $H \equiv H_t \equiv H^1(D(t))$ ，及 $H_t^0 \equiv H^0(D(t))$ ， $H_t^2 \equiv H^2(D(t))$ ，其定義如(116)式。給定 $D(t)$ 上相應的 bilinear form \tilde{I} 如(117)式，與 linear operator

$$\tilde{L} : H_t^2 \rightarrow H_t^0, \quad (148)$$

則有

$$\tilde{i}(\beta) - \tilde{i}(\alpha) = \sum_{\alpha \leq t < \beta} \tilde{\nu}(t), \quad \alpha, \beta \in [0, b), \quad (149)$$

其中 $\tilde{\nu}(t)$ 為 \tilde{I} 在 $D(t)$ 上的 nullity：即 $D(t)$ 上 Jacobi 場的重數 [如 §4，(59)式]，而 \tilde{i} 為 \tilde{I} 在 $D(t)$ 上的 index [定義如(61)式]。

證明： 如果把 Morse Index 定理純粹看成 bilinear form \tilde{I} 的 nullity 與 index 之間的關係，而不涉及 \tilde{L} ，那麼其 cmc 形式的證明 (即定理 9) 與其「原型」(即定理 5) 是一樣的。但若把 Morse Index 定理看成 operator \tilde{L} 的 nullity 與 index 的關係，則唯一的差別在於： \tilde{L} 並非 H_t^2 的 invariant operator [如定理 5 中的 L 把 X 映到 X 本身，即 $L : X \rightarrow X$ 其中 $X = X(t)$]，我們只知(148)式，但 H^2 在 H^1 中 dense， H^1 又在 H^0 中 dense，Morse index 定理仍然成立 [亦見下文定理 10 的證明]。詳述如下：

先回想 Jacobi 場的定義 [見 §2，(17)式]：給定 $\varphi \in H^0(D)$ ，當 $\varphi \in \mathcal{G}(D) \equiv \{g \in C^\infty(D) \cap C^0(\bar{D}); g|_{\partial D} = 0, \int_D g = 0\}$ ， $\varphi \neq 0$ ，而

⁴參見 [Jj]，Thm. 11.2.2, Cor. 11.1.1, 11.1.2, 11.2.1.

且滿足

$$\tilde{L}\varphi = 0 \quad (150)$$

之時，稱 φ 為 D 上的（非零）Jacobi 場。當 $D(t) \subset M$ ， $t \in [0, b]$ ，定義：

$$\text{nullity } \nu(t) \equiv D(t) \text{ 上獨立 Jacobi 場的個數} = \dim J_t, \quad (151)$$

其中 $J_t \equiv \{D(t) \text{ 上的（非零）Jacobi 場}\} \cup \{0\} \subset \mathcal{G}(D(t))$ 。容易看出：給定 $\varphi \in H_t^0$ ，由(142)式可表

$$\varphi = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots \text{ 於 } H_t^0 \text{ 中} \quad (152)$$

則

$$\varphi \in J_t \iff a_i = 0, \forall i, \text{ 其相應的 } \tilde{\lambda}_i(t) \neq 0. \quad (153)$$

此事很顯然，只要觀察：

$$\begin{aligned} \|\tilde{L}\varphi\|^2 &= \|\tilde{\lambda}_1 a_1 u_1 + \tilde{\lambda}_2 a_2 u_2 + \cdots\|^2 \\ &= |\tilde{\lambda}_1 a_1|^2 + |\tilde{\lambda}_2 a_2|^2 + \cdots, \end{aligned}$$

便知 $\nu(t) =$ 特徵值為 0 的重數。今設 $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i(\bar{t})$ 時，有

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \cdots \leq \tilde{\lambda}_s \leq 0 < \tilde{\lambda}_{s+1} \leq \tilde{\lambda}_{s+2} \leq \cdots \rightarrow \infty. \quad (154)$$

重複之前定理 5 的證明 *Step 2*，知

$$\sum_{0 \leq t \leq \bar{t}} \nu(t) = s. \quad (155)$$

又設 $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i(\bar{t}^+)$ ，當 $\bar{t}^+ > \bar{t}$ 且足夠接近 \bar{t} 時，有

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \cdots \leq \tilde{\lambda}_s < 0 < \tilde{\lambda}_{s+1} \leq \tilde{\lambda}_{s+2} \leq \cdots \rightarrow \infty. \quad (156)$$

因此 \tilde{L} 在 \bar{t}^+ 的 index

$$i(\bar{t}^+) = s = \sum_{0 \leq t \leq \bar{t}} \nu(t), \quad (157)$$

故得(149)式，即 Morse index 定理的 cmc 形式。 ■

注意如上的證明 [包含(154)式到(156)式的變化]，我們不只需要 $\tilde{\lambda}_k(t)$ 對 t 連續下降，而且也需要它「嚴格下降」，亦即在上述證明中需用到：

$$\bar{t} < \bar{t}^+ \implies \tilde{\lambda}_k(\bar{t}^+) < \tilde{\lambda}_k(\bar{t}). \quad (158)$$

這些是隨後必須補充證明的的工作。

§6.4 λ_k 與 $\tilde{\lambda}_k$ 的連續性

給定 cmc 流形 $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ 上的 \mathcal{C}^0 -遞增族 $\mathcal{D} \equiv \{D(t); t \in [0, b]\}$ 。表 $H_t \equiv H(D(t))$ 為 $D(t)$ 上「邊界值為 0 且有 volume constraint」的一階 Sobolev 空間 [其定義見 §6.1]。我們可以把 H_t 當成 H_b 中的子空間，即 $H_t \subset H_b, \forall t \leq b$ 。

引理 A (Sobolev 空間的連續性) H_t 對 t 連續，亦即

$$H_t = \bigcap_{r>t} H_r; \quad H_t = \overline{\bigcup_{s<t} H_s}, \quad (159)$$

其中“ $\bar{\cdot}$ ”表：在 H_b 中取 closure。

注記 15 對於沒有 volume constraint 的情況，Sobolev 空間 $E_t^1 \equiv E(D(t))$ 一樣對 t 連續。

我們把引理 A 的證明留到 §7，先利用它來證明：

定理 10 (λ_k 與 $\tilde{\lambda}_k$ 的連續性) 在 $D(t)$ 上 stability operator L 與 \tilde{L} 的特徵值 $\lambda_k = \lambda_k(t)$ 與 $\tilde{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_k(t)$ 都對 t 連續，而且隨著 t 嚴格下降 (strictly decrease)。

證明⁵：本定理的證明對 λ_k 與 $\tilde{\lambda}_k$ 的方法，基本上是一樣的。以下我們選擇

⁵本定理 10 的證明，idea 基本上來自 Frid-Thayer 的論文 [F-T]。這裡只用另一種寫法修改。但是論中需要用到 Sobolev 空間 H_t 的連續性，則是我們接手要完成的大課題 (§7.2, §7.3, §7.4)。

較複雜的 $\tilde{\lambda}_k$ 來證明， λ_k 的連續性證明相仿。

Step 1. 觀察 min-max 原理(136)式。對於 $s \leq t$ ，因 $\{V_s^k \subset H_s; \dim V_k = k\}$ 為 $\{V_t^k \subset H_t; \dim V_t^k = k\}$ 的 sub-collection，易知

$$\tilde{\lambda}_k(t) \leq \tilde{\lambda}_k(s), \quad \forall k. \quad (160)$$

故 $\tilde{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_k(t)$ 對 t 下降，至於其「嚴格」下降，留待 §6.5 再加以證明。

Step 2. 設 s_1, s_2, \dots 遞降而趨於 t ，欲證

$$\tilde{\lambda}_k(s_1), \tilde{\lambda}_k(s_2), \dots \rightarrow \tilde{\lambda}_k(t). \quad (161)$$

設 $u_1, \dots, u_k \in H_t$ 為 \tilde{L}_t 相應於 $\tilde{\lambda}_1(t), \dots, \tilde{\lambda}_k(t)$ 的正交特徵函數，同樣 $\forall s_i$ ，亦考慮

$$v_1(s_i), \dots, v_k(s_i) \in H_{s_i} \quad (162)$$

為 \tilde{L}_{s_i} 相應於 $\tilde{\lambda}_1(s_i), \dots, \tilde{\lambda}_k(s_i)$ 的正交特徵函數。很自然的，對於 $j = 1, \dots, k$ ，當 $s_i \rightarrow t$ 時，我們希望 $v_j(s_i)$ 會有極限 $v_j(t)$ ，而且

$$v_j(t) = u_j(t) \quad (\text{必要時調整順序}). \quad (163)$$

這時我們就可以期望 $\tilde{\lambda}_j(s_1), \tilde{\lambda}_j(s_2), \dots \rightarrow \tilde{\lambda}_j(t)$ 。因 $\tilde{\lambda}_j(s_1), \tilde{\lambda}_j(s_2), \dots$ 遞升，而且 $\tilde{\lambda}_j(t)$ 為其上界，所以 $\tilde{\lambda}_j(s_1), \tilde{\lambda}_j(s_2), \dots$ 有極限 α_j ，即

$$\alpha_j = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_j(s_i). \quad (164)$$

Step 3. 對任何 $j = 1, \dots, k$ ，知

$$\{v_j(s_1), v_j(s_2), \dots\}$$

在 $L^2(D(b))$ 中有界 [因 $\|v_j(s_i)\| = 1$]。今證其在 $H = H_b$ 中亦有界，即

$$\begin{aligned} I(v_j(s_i), v_j(s_i)) &= \int_{D_b} |Dv_j(s_i)|^2 - \|B\|^2(v_j(s_i))^2 \\ &= \tilde{\lambda}_j(s_i) \|v_j(s_i)\|^2 \leq c. \quad [\text{因若固定 } j, \text{ 則 } \{\tilde{\lambda}_j(s_1), \tilde{\lambda}_j(s_2), \dots\} \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 中有界}] \end{aligned} \quad (165)$$

故 $\|Dv_j(s_i)\|^2 \leq$ 某常數 c_1 。由 Rellich 緊緻定理 [Ch. 23, §7]，知

$$\{v_j(s_1), v_j(s_2), \dots\}$$

在 $L^2(D(b))$ 中有收斂子序列，仍記它為 $\{v_j(s_1), v_j(s_2), \dots\}$ ，其極限記為 v_j 。事實上， $v_j(s_i) \rightarrow v_j$ 於 H_b 中 [不只於 $L^2(D(b))$ 中]，當 $i \rightarrow \infty$ 。先注意 $v_j(s_i)|_{D(s_i)}$ 為 C^∞ ，且在 $D(b)$ 中有弱微分 $D_h v_j(s_i)$ 。欲證 $D_h v_j(s_i)$ 為 $L^2(D(b))$ 中的 Cauchy 序列。簡記 $f \equiv v_j(s_i)$ ， $g \equiv v_j(s_\ell)$ ， $w_{i\ell} \equiv f - g$ 。不妨設 $\ell > i$ ，用部分積分法容易算得當 $i, \ell \rightarrow \infty$ 時， $\|Dw_{i\ell}\|_{L^2(D(b))}^2$ 接近於

$$\int_{D(s_i)} (\tilde{\lambda}_j(s_i)f - \tilde{\lambda}_j(s_\ell)g)(f - g) + \int_{\partial D(s_i)} \frac{\partial(f - g)}{\partial n} \cdot g \quad (166)$$

顯然上式趨於 0，當 $i, \ell \rightarrow \infty$ 。理由是 $\tilde{\lambda}_j(s_i)$ 與 $\tilde{\lambda}_j(s_\ell)$ 皆趨於 α_j ， $\|f - g\|^2 \rightarrow 0$ ，且 $\frac{\partial f}{\partial n}, \frac{\partial g}{\partial n}$ 有界而 g 在 $\partial D(s_i)$ 上趨於 0。故 $D_h v_j(s_i)$ 在 $L^2(D(b))$ 中有極限，記為 ζ_h ， $h = 1, 2, \dots, n$ 。於是 $\forall \varphi \in C_c^\infty(D(b))$ ，有

$$\langle \zeta_h, \varphi \rangle = \lim_i \langle D_h v_j(s_i), \varphi \rangle = \lim_i (-\langle v_j(s_i), D_h \varphi \rangle) = -\langle v_j, D_h \varphi \rangle. \quad (167)$$

故 ζ_h 為 v_j 的弱微分 $D_h v_j$ 。所以 $v_j(s_i) \rightarrow v_j$ 於 H_b 中。接著我們想問：是否 $v_j = u_j(t)$ ？即想問：是否 $\alpha_j = \tilde{\lambda}_j(t)$ ？

Step 4. ($\tilde{\lambda}_k$ 的右連續)

欲說明 $v_j \in H_t$ 。此因給定 $\ell > 0$ ， $v_j(s_\ell), v_j(s_{\ell+1}), \dots$ 皆在 H_{s_ℓ} 中，故 $v_j \in H_{s_\ell}$ 。由引理 A 得 $v_j \in \bigcap_{\ell=1}^\infty H_{s_\ell} = H_t$ 。設 H_t^2 表 $\mathcal{G}(D(t))$ 在二階 Sobolev 空間 $W^{2,2}(D(t))$ 中的 closure。一般熟知 H_t^2 在 H_t 中為 dense。我們要證明在“弱意味”(weak sense) 下

$$\langle \tilde{L}_t v_j, \varphi \rangle = \langle \alpha_j v_k, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_t. \quad (168)$$

注意 $v_j \in H_t$ ，但不知 $v_j \in H_t^2$ 。上式意謂

$$\tilde{I}(v_j, \varphi) = \alpha_j \langle v_j, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_t. \quad (169)$$

若考慮 $w \in H_t^2$ ， $\tilde{I}(v_j, w) = \alpha_j \langle v_j, w \rangle$ 就相當於

$$\langle v_j, \tilde{L}w \rangle = \alpha_j \langle v_j, w \rangle. \quad (170)$$

此時左端 $\tilde{L}w$ 是 H_t^0 中真正的 L^2 -函數，而

$$\begin{aligned} \langle v_j, \tilde{L}w \rangle &= \langle \lim_{i \rightarrow \infty} v_j(s_i), \tilde{L}w \rangle \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \langle v_j(s_i), \tilde{L}w \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} I(v_j(s_i), w) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_j(s_i) \langle v_j(s_i), w \rangle = \alpha_j \langle v_j, w \rangle. \end{aligned} \quad (171)$$

證得(170)式， $\forall w \in H_t^2$ 。但因 H_t^2 在 H_t 中 dense，故證得(169)及(168)。此即有弱方程

$$\tilde{L}_t v_j = \alpha_j v_j, \quad (172)$$

故 α_j 為 \tilde{L}_t 的特徵值，其相應的特徵函數為 v_j 。一般來說，從上式(172)只知 α_j 是 \tilde{L}_t 的特徵值，但不知道 α_j 是不是 \tilde{L}_t 的“第 j 個”特徵值，所以還得不到 $\alpha_j = \tilde{\lambda}_j(t)$ ，此即還得不到 $v_j = u_j(t)$ 。不過，因現今考慮 s_1, s_2, \dots 下降到 t ，即

$$t \leq \dots \leq s_i \leq \dots \leq s_2 \leq s_1, \quad (173)$$

得 $\tilde{\lambda}_j(t) \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_j(s_i) \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_j(s_2) \geq \tilde{\lambda}_j(s_1)$ ，知 $\tilde{\lambda}_j(t) \geq \alpha_j$ ， $\forall j = 1, \dots, k$ 。由鴿籠原理 (pigeon hole)，我們可以進一步知道 $\tilde{\lambda}_j(t) = \alpha_j$ 。理由是：若 $\tilde{\lambda}_1(t) \geq \alpha_1$ ，則因前述已證知 α_1 為 \tilde{L}_t 的一個特徵值，所以 α_1 必然等於某 $\tilde{\lambda}_h(t)$ ， $h \neq 1$ 。但 $\tilde{\lambda}_h(t) \geq \tilde{\lambda}_1(t)$ ，即 $\alpha_1 \geq \tilde{\lambda}_1(t)$ 。故 $\alpha_1 = \tilde{\lambda}_1(t)$ 。以此類推，得 $\alpha_2 = \tilde{\lambda}_2(t)$ ， $\alpha_3 = \tilde{\lambda}_3(t)$ ， \dots 。所以得證 $\tilde{\lambda}_j(t)$ 為右連續，即

$$\lim_{s > t, s \rightarrow t} \tilde{\lambda}_k(s) = \tilde{\lambda}_k(t). \quad (174)$$

但若 s_1, s_2, \dots 為 t 的左數列，則上述方法用不上，需另找方法證明 $\tilde{\lambda}_k$ 為左連續。

Step 5. ($\tilde{\lambda}_k(t)$ 的左連續)

給定上升數列 $s_i \nearrow t$ ($s_i < t$)，欲證 $\tilde{\lambda}_k(s_i) \rightarrow \tilde{\lambda}_k(t)$ 。因 $\tilde{\lambda}_k$ 對 t 下降 (Step 1)，知 $\tilde{\lambda}_k(s_i)$ 為下降數列，而且有下界 $\tilde{\lambda}_k(t)$ ，故有左極限

$$\beta_k \equiv \lim_{s_i < t, s_i \rightarrow t} \tilde{\lambda}_k(s_i) \geq \tilde{\lambda}_k(t). \quad (175)$$

若證得 $\beta_k = \tilde{\lambda}_k(t)$ ，便知 $\tilde{\lambda}_k(t)$ 左連續。其證明比前述右連續直接。只要盯住 min-max 原理 [(136)式]，利用 Sobolev 空間的連續性 [(159)式] 及 $\tilde{I}(f, f)$ 對 f 的連續性即得。詳述如下：

如 Step 2，表 u_1, u_2, \dots, u_k 為 H_t 中 \tilde{L}_t 相應於 $\tilde{\lambda}_1(t), \tilde{\lambda}_2(t), \dots, \tilde{\lambda}_k(t)$ 的正交特徵函數，由引理 A (159)式，固定 $j, 1 \leq j \leq k$ ，知存在 $s_1, s_2, \dots \nearrow t$ 及

$$\bar{v}_j(s_i) \in H_{s_i} \subset H_t, \quad \forall i = 1, 2, \dots, \quad (176)$$

使得當 $i \rightarrow \infty$ 時， $\bar{v}_j(s_i) \rightarrow u_j$ 於 $H_t \subset H_b$ 中。爲了簡化符號，以下記 $\bar{v}_j \equiv \bar{v}_j(s_i)$ 。

Step 6. 由 min-max 原理 (136)式，知

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_k(s_i) &= \min_{V^k \subset H_{s_i}} \left\{ \max_{v \in V^k \cap S} \tilde{I}(v, v) \right\} \quad [\text{其中 } \dim V^k = k] \\ &\leq \max_{\substack{v \in \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \rangle \\ \|v\|=1}} \tilde{I}(v, v) \xrightarrow{\text{當 } i \rightarrow \infty} \max_{\substack{u \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle \\ \|u\|=1}} \tilde{I}(u, u) \quad [\text{因 } \tilde{I} \text{ 爲連續}] \\ &= \tilde{\lambda}_k(t) \leq \tilde{\lambda}_k(s_i), \quad \forall s_i. \quad [\text{注意 } \tilde{I}_s = \tilde{I}_b, \quad \forall s \leq b] \end{aligned} \quad (177)$$

所以 $\lim_{s_i < t, s_i \rightarrow t} \tilde{\lambda}_k(s_i) = \tilde{\lambda}_k(t)$ 。得 $\tilde{\lambda}_k$ 亦爲左連續。與 Step 4 的右連續合併，證得 $\tilde{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_k(t)$ 對 t 連續。 ■

§6.5 $\tilde{\lambda}_k(t)$ 嚴格下降的證明

給定 M^n 上的 C^0 -遞增族 $\mathcal{D} \equiv \{D(t); t \in [0, b]\}$ ，設 stability operator $\tilde{L}_t : H_t \rightarrow H_t^0$ 的特徵值爲 $\tilde{\lambda}_k(t)$ 。欲證

$$s < t \implies \tilde{\lambda}_k(s) > \tilde{\lambda}_k(t), \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (178)$$

證明： *Step 1.* 設有 $k > 0$ ，使得 $\tilde{\lambda}_k(s) = \tilde{\lambda}_k(t) \equiv \lambda$ 。將證明會導致矛盾。設 $\{u_1, u_2, \dots\}$ 與 $\{v_1, v_2, \dots\}$ 按序分別為 H_s 與 H_t 中相應於 $\tilde{\lambda}_j(s)$ 與 $\tilde{\lambda}_j(t)$ 的正交特徵函數，亦即

$$\tilde{L}_s u_j = \tilde{\lambda}_j(s) u_j; \quad \tilde{L}_t v_j = \tilde{\lambda}_j(t) v_j. \quad (179)$$

$\forall j = 1, 2, \dots$ 。這裡 $\tilde{L}_t \equiv \tilde{L}(D(t))$ 。我們想要製作某 $u \in H_s \subset H_t$ ，滿足 $\|u\| = 1$ ，且

$$\tilde{L}_t u = \lambda u. \quad (180)$$

若有這樣的 u ，由 regularity 定理 [見 §6.4 注記 14] 知 $u \in C^\infty(D(t))$ 。但因 $\overline{D(s)} \subset D(t)$ ，且 $u \in H_s$ ，知在 open set $D(t) \setminus \overline{D(s)} \neq \emptyset$ 上 $u \equiv 0$ 。由 Hopf's spherical 定理 [見 Ch. 23, §2] 知在整個 $D(t)$ 上 $u \equiv 0$ ，可是 $\|u\| = 1$ 於 $L^2(D(t))$ 上。這導致矛盾，即(178)式必須成立。

Step 2 (Step 1 中 u 的製作). 取 $u \in \text{linear span } \langle u_1, \dots, u_k \rangle \subset H_s \subset H_t$ ，使 u 滿足 $\|u\| = 1$ ，而且 $\langle u, v_1 \rangle = \langle u, v_2 \rangle = \dots = \langle u, v_{k-1} \rangle = 0$ 。這樣的 $u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$ 可以找得到：方法是從所求的 $(k-1)$ 個聯立方程式解 a_1, \dots, a_k ，最後再從 $\|u\| = 1$ 完全決定 u 。另外，因 $u \in H_t$ ，可表 $u = \langle u, v_k \rangle v_k + \langle u, v_{k+1} \rangle v_{k+1} + \dots$ 而得

$$\begin{aligned} \langle \tilde{L}_t u, u \rangle &= \tilde{\lambda}_k(t) \langle u, v_k \rangle^2 + \tilde{\lambda}_{k+1}(t) \langle u, v_{k+1} \rangle^2 + \dots \\ &\geq \tilde{\lambda}_k(t) (\langle u, v_k \rangle^2 + \langle u, v_{k+1} \rangle^2 + \dots) = \tilde{\lambda}_k(t) = \lambda. \end{aligned} \quad (181)$$

另一方面，

$$\begin{aligned} \langle \tilde{L}_s u, u \rangle &= \tilde{\lambda}_1(s) a_1^2 + \tilde{\lambda}_2(s) a_2^2 + \dots + \tilde{\lambda}_k(s) a_k^2 \\ &\leq \tilde{\lambda}_k(s) (a_1^2 + \dots + a_k^2) = \tilde{\lambda}_k(s) = \lambda. \end{aligned} \quad (182)$$

但

$$\lambda \geq \langle \tilde{L}_s u, u \rangle = \langle \tilde{L}_t u, u \rangle \geq \lambda, \quad [\text{參見下文注記 16}] \quad (183)$$

故(181)與(182)兩式中的“ \geq ”都為“ $=$ ”，因此 $\forall \ell = 1, 2, \dots$ ， $\langle u, v_{k+\ell} \rangle^2 = 0$ ，除非 $\tilde{\lambda}_{k+\ell}(t) = \tilde{\lambda}_k(t)$ 。這就是說， $u = \langle u, v_k \rangle v_k + \dots + \langle u, v_m \rangle v_m$ ， $m \geq k$ ，且 v_k, \dots, v_m 相應的特徵值都是 $\tilde{\lambda}_k(t) = \lambda$ 。因此

$$\tilde{L}_t u = \lambda u. \quad (184)$$

此即所求的(180)式，回 *Step 1*，得預期的矛盾，定理 10 證畢。 ■

注記 16 上述證明 *Step 2* (183)式中，提到當 $u \in H_s \subset H_t$ 時有：

$$\langle \tilde{L}_s u, u \rangle = \langle \tilde{L}_t u, u \rangle, \quad (185)$$

這是對的，但一般來說，對 $g \in H_t$

$$\langle \tilde{L}_s u, g \rangle \neq \langle \tilde{L}_t u, g \rangle. \quad (186)$$

幾何的理由是在 $\partial D(s) \subset D(t)$ 上， u 有拐點 (cusp)，它的 weak Laplacian $\tilde{L}_t u$ 在 $\partial D(s)$ 上的 contribution 可能是無窮大，所以不能因 $\partial D(s)$ 在 $D(t)$ 中的測度 (measure) 為 0 而加以忽略，這個不能忽略的量，先記為 \bar{E} ，可是看 \tilde{L} 相應的 bilinear form $\tilde{I}, \forall g \in H_t$,

$$\tilde{I}_s(u, g) = \int_{D(s)} Du \cdot Dg - \|B\|^2 u g = \int_{D(t)} Du \cdot Dg - \|B\|^2 u g = \tilde{I}_t(u, g)$$

卻是對的 [因在 $D(t) \setminus \overline{D(s)}$ 上 u 與 Du 都 $\equiv 0$]。就分析的式子來看，對於 $u \in H_s \subset H_t$ ，什麼是 $\tilde{L}_t u$ ？因 H_t^2 在 H_t 中 dense，可以取 $u_i \in H_t^2$ ，使 $u_i \rightarrow u$ 於 H_t 中。於是可以定義 $\tilde{L}_t u = \lim_i \tilde{L}_t u_i$ 。但又因 $u_i \in H_t^2$ ，故有 C^∞ -函數 $\varphi_{i,k} \in \mathcal{G}(D(t))$ ，使 $\varphi_{i,k} \rightarrow u_i$ 於 H_t^2 中，當 $k \rightarrow \infty$ 時。所以 $\tilde{L}_t(\varphi_{i,k}) \rightarrow \tilde{L}_t u_i$ 。用 diagonal process，我們可以找到 C^∞ -函數 $\psi_j \in \mathcal{G}(D(t))$ ，使 $\psi_j \rightarrow u$ 於 H_t^2 中，而且

$$\tilde{L}_t \psi_j \rightarrow \tilde{L}_t u \text{ 於 } H_t^0 \text{ 中}. \quad (187)$$

於是，對 $g \in H_t$ ，取 C^∞ -函數 $\eta_j \in \mathcal{G}(D(t))$ ，使 $\eta_j \rightarrow g$ 於 H_t 中，

$$\begin{aligned} \langle \tilde{L}_t u, g \rangle &= \lim_j \langle \tilde{L}_t \psi_j, \eta_j \rangle = \lim_j \left\langle -\Delta_M \psi_j - \|B\|^2 \psi_j - \frac{1}{|D|} \int_{D(t)} L \psi_k, \eta_j \right\rangle \\ &= \lim_j \int_{D(t)} (-\Delta_M \psi_j - \|B\|^2 \psi_j) \eta_j \quad \left[\int_{D(t)} \eta_j = 0 \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_j \left\{ \int_{D(t)} (D\psi_j \cdot D\eta_j - \|B\|^2 \psi_j \eta_j) + E_j \right\}, \quad (188)$$

其中 $E_j \equiv -\int_{\partial D(t)} (D_\nu \psi_j) \eta_j$ 為邊界項， ν 為定義在 $\partial D(t)$ 上幾乎處處 (almost everywhere) 存在的 unit out-normal。它的存在，來自 $\partial D(t)$ 為 Lipschitz 的假設 [見定義 2]。 D_ν 表 normal derivative。因 $\eta_j \in \mathcal{G}(D(t))$ ，在 $\partial D(t)$ 上等於 0，故 $E_j = 0$ 。得

$$\langle \tilde{L}_t u, g \rangle = \lim_j \tilde{I}_t(\psi_j, \eta_j) = \tilde{I}_t(u, g). \quad (189)$$

今考慮 $\langle \tilde{L}_s u, g \rangle$ ，仿上文，可取 $\bar{\psi}_j \in \mathcal{G}(D(s))$ ，使 $\bar{\psi}_j \rightarrow u$ 於 H_s^2 中，而且 $\tilde{L}_s \bar{\psi}_j \rightarrow \tilde{L}_s u$ 於 H_s^0 中。此時對 $g \in H_t$ ，仍取 η_j 如前，則

$$\begin{aligned} \langle \tilde{L}_s u, g \rangle &= \lim_j (\tilde{I}_s(\bar{\psi}_j, \bar{\eta}_j) - \bar{E}_j) \\ &= \tilde{I}_s(u, g) - \bar{E}. \end{aligned} \quad (190)$$

這裡邊界項 $\bar{E} \equiv \lim_j \bar{E}_j$ ， $\bar{E}_j \equiv \int_{\partial D(s)} (D_\nu \bar{\psi}_j) \eta_j$ 。一般時候 $\bar{E} \neq 0$ 。這個 \bar{E} 就是上述幾何理由中提到的不能忽略的量。所以(186)式左右兩端的差便是 \bar{E} ，亦即

$$\langle \tilde{L}_s u, g \rangle = \langle \tilde{L}_t u, g \rangle - \bar{E}. \quad [\text{綜合(189)與(190)兩式}] \quad (191)$$

又注意，取 $g = u \in H_s \subset H_t$ 時，則 $\bar{E}_j = 0, \forall j$ ，而有

$$\langle \tilde{L}_s u, u \rangle = \tilde{I}_s(u, u) = \tilde{I}_t(u, u) = \langle \tilde{L}_t u, u \rangle, \quad (192)$$

這便是(183)式所需的關係。

§7 Sobolev space H_t 的連續性

§7.1 關鍵的例子

事實上，我們有 Three closure theorem (三閉包定理)。設

$$\mathcal{F}^1(D) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(D) \cap \mathcal{C}^1(\bar{D}); f|_{\partial D} = 0\}. \quad (193)$$

知 $C_c^\infty(D) \subset \mathcal{F}^1(D) \subset \mathcal{F}(D)$ 。這三個函數空間在 C^∞ -架構中很不一樣，但 $C_c^\infty(D)$ ， $\mathcal{F}^1(D) \cap W^{1,2}(D)$ 與 $\mathcal{F}(D) \cap W^{1,2}(D)$ 三者 $W^{1,2}(D)$ 中的 closure，卻是相同的函數空間。這事非常有趣，值得我們花費相當篇幅來證明。對於有 volume constraint（體積制限）的情況，類似的結論也一樣正確。更有趣的是這結論 [以下稱為 Observation Z] 將成為我們證明引理 A 的基礎，也因此推導出特徵值 $\lambda_k(t)$ 與 $\tilde{\lambda}_k(t)$ 的連續性及本章關於 Jacobi 場分佈的主要定理。

我們將證明一連串的定理：

定理 A（主要定理，Huang–Lin [H-L]）設 $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ 為常均曲率曲面 (cmc hypersurface)。考慮 M^n 上的 C^0 -遞增族 $\mathcal{D} = \{D(t) \subset M^n; t \in [0, b]\}$ ，其中 $D(t)$ 為（廣義）Lipschitz domain，其 topological type 隨著 t 可以改變。對任何 $k > 1$ ，存在 domain $D(t)$ ，其上有（非零的）Jacobi 場，使得

$$D[\lambda_{k-1} = 0] \subset D(t) \subset D[\lambda_{k+1} = 0]. \quad (194)$$

更準確的說，考慮 $D(t)$ 上出現的獨立 Jacobi 場，其中 $t \in [t_{k-1}, t_k]$ ，則其總個數 μ_k 滿足(96)式，亦即

$$0 < m_{k-1} + m_k - 1 \leq \mu_k \leq m_{k-1} + m_k + 1, \quad (195)$$

而當 $k = 1$ ， $\mu_0 = 0$ 。這裡 m_k 為 λ_k 的 multiplicity。

證明： 基於定理 8 與以下定理 B。 ■

定理 B（特徵值的連續性）設 M^n 與 \mathcal{D} 如定理，則 stability operator L 與 \tilde{L} 在 $D(t)$ 上的特徵值 $\lambda_k(t)$ 與 $\tilde{\lambda}_k(t)$ 對 t 連續，而且隨著 t 嚴格下降。

證明： 見前文 §6.4 定理 10 與 §6.5。論證中需利用 Sobolev 空間的連續性 (定理 C)。 ■

定理 C (Sobolev 空間的連續性) 設 M^n 與 \mathcal{D} 如定理 , $H_t \equiv H(D(t))$ 為 $D(t)$ 上 “邊界值” 為 0 , 且有 volume constraint 的 Sobolev 空間 [其定義見 §6.1 及(108)式] 。把 H_t 看成 H_b 的 subspace , $\forall t \leq b$ 。則

$$H_t = \bigcap_{r>t} H_r; \quad H_t = \overline{\bigcup_{s<t} H_s}, \quad (196)$$

此即 H_t 對 t 連續。其中 “ $\overline{(\)}$ ” 表：在 H_b 中取 $(\)$ 的 closure。對於沒有 volume constraint 的情況，Sobolev 空間 $E_t \equiv E(D(t))$ 也一樣對 t 連續。

證明： 見 §7.4。論證中需用到 Observation Z. ■

Observation Z (Three closure theorem) 設 D 為 Riemannian 流形 M^n 上的 (廣義) Lipschitz domain , 則

$$E(D) = W_0^{1,2}(D), \quad (197)$$

$$H(D) = \mathcal{G}_c(D) \text{ 在 } W^{1,2}(D) \text{ 中的 closure,} \quad (198)$$

其中 $E(D)$ 與 $H(D)$ 見(108)式，而

$$\mathcal{G}_c(D) := \{g \in \mathcal{G}(D); \overline{\text{supp } g} \subset D\}. \quad (199)$$

注記 17 在一般 Sobolev 理論中，通常把 $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ 在 $W^{1,2}(D)$ 中的 closure 記成 $W_0^{1,2}(D)$ ，但 $E(D)$ 為 $\mathcal{F}(D) \cap W^{1,2}(D)$ 在 $W^{1,2}(D)$ 的 closure，所以(197)式就是 Dirichlet case (即沒有體積制限) 的 Three closure theorem，因為 $\mathcal{F}^1(D) \cap W^{1,2}(D)$ 被夾在 $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ 與 $\mathcal{F}(D) \cap W^{1,2}(D)$ 中間。至於有體積制限的情況，結論也一樣。

注記 18 $W_0^{1,2}(D)$ 其實也等於 $\{f \in W^{1,2}(D); f \text{ 在 } \partial D \text{ 上的 trace 爲 } 0\}$ ，其中 trace 就是 Sobolev 函數在 ∂D 上的 “邊界值”。由於 Sobolev 函數只是 L^2 -函數，在 zero-measure set ∂D 無意義，所以 Sobolev 函數的邊界值必須另行定義。相關知識可參考 Evans–Gariepy [E-G] 與 Hu [Hi]。

對於 Observation Z，我們先證明它的局部形式，即 Lemma A，亦即先考慮 standard Lipschitz simple domain (U, Γ, V) ，然後用 partition

of unity 把局部形式整合成一般形式。記得在定義 7 之後我們提過：通由 coordinate map φ ，「在 \mathbb{R}^n 上的 (U, Γ, V) 」可自由的視為「在 M^n 上的 Lipschitz simple domain」，反之亦然。

一般給定 (U, Γ, V) ，我們可以用向內收縮的方式，調整 U 與 V ，使得

$$U = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n; x \in V, u(x) < r < v(x)\}, \quad (200)$$

而 $\Gamma = \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^n; x \in V\}$ 且 $V = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^n; x \in V \subset H^{n-1}\}$ ，其中 H^{n-1} 為 \mathbb{R}^n 中的某個 hyperplane。設 $L > 0$ 為 $u = u(x)$ 的 Lipschitz 常數。另外再適當調整 coordinate map，可以取 U 上的坐標 (x, r) 使 r -曲線皆為垂直於 V 的測地線。我們稱 M^n 上經這樣收縮與調整過的 (U, Γ, V) 為標準 (standard) Lipschitz simple domain。下文提到的 (U, Γ, V) 都是這樣標準化的 triple。

Lemma A (Observation Z 的局部形式) 在 (U, Γ, V) 上給定 $f \in C^\infty(U) \cap C^0(\overline{U} \cap \Gamma)$ 。設 $f|_\Gamma = 0$ ，而且 $f \in W^{1,2}(D)$ 。記

$$C_\Gamma^\infty(U) := \{h \in C^\infty(D); \overline{\text{supp } h} \cap \Gamma = \emptyset\}, \quad (201)$$

則 $\forall \varepsilon > 0, \exists h \in C_\Gamma^\infty(U)$ ，使得

$$\|f - h\|_{W^{1,2}(U)}^2 < \varepsilon. \quad (202)$$

證明： Step 1. 設 $\bar{\delta} > 0$ ，考慮

$$N_{\bar{\delta}} := \{(x, r) \in U; x \in V, u(x) < r < u(x) + \bar{\delta}\}. \quad (203)$$

選 $\bar{\delta} = 4\delta$ ， δ 隨後因 ε 而決定。考慮 $\bar{u} = u + 2\delta$ ，及 \bar{u} 的 C^∞ -逼近函數 $w = w(x)$ 如下：

$$w(x) := \int_V \bar{u}(y) \varphi_\alpha(y - x) dy, \quad x \in V, \quad (204)$$

其中 α 是個很小的正數，

$$\varphi_\alpha(x) := \frac{1}{\alpha^{n-1}} \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right), \quad (205)$$

而 $\varphi \in C^\infty(H^{n-1})$ 為典型的 mollifier 函數。這裡我們不妨自由的向外擴充 U, V 與 $u(x)$ 的定義域，使 $w(x)$ 在 ∂V 附近能有明確的定義 (well-defined)。 $\forall x \in V$ ，易知

$$\begin{aligned} |w(x) - \bar{u}(x)| &= \left| \int_V (\bar{u}(y) - \bar{u}(x)) \varphi_\alpha(y-x) dy \right| \\ &\leq \int_{B_\alpha(x)} L \cdot |y-x| \cdot \varphi_\alpha(y-x) dy \leq L \cdot \alpha = \delta. \end{aligned} \quad (206)$$

這裡選 $\alpha = \delta/L$ ，而 $B_\alpha(x)$ 指 V 上以 x 為中心， α 為半徑的 $(n-1)$ -球。

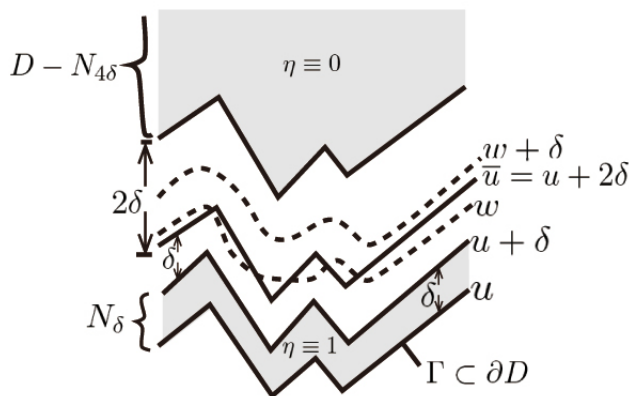


圖 30.8

Step 2. 定義 $\eta \in C^\infty(U)$ 使

$$\eta(x, r) := \eta_0\left(\frac{r - w(x)}{\delta}\right),$$

其中 $\eta_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ 表通常習慣使用的 cut-off 函數，使 $\eta_0(x) \equiv 1, \forall x > 1$ ； $0 \leq \eta_0(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1]$ ；而 $\eta_0(x) \equiv 0, \forall x \leq 0$ 。顯然， $\eta \equiv 1$ 在 $U - N_{\bar{\delta}}$ 上； $0 \leq \eta \leq 1$ 在 $N_{\bar{\delta}}$ 上；而 $\eta \equiv 0$ 於 N_δ 中。記得 $\bar{\delta} = 4\delta$ 。今定義

$$h := f \cdot \eta \in C^\infty_\Gamma(U), \quad (207)$$

而估計 $f - h$ 的 Sobolev norm 如下：

$$\int_U |f - h|^2 = \int_{N_{\bar{\delta}}} |f(1 - \eta)|^2 \leq \int_{N_{\bar{\delta}}} f^2 \leq C \left(\int_{N_{\bar{\delta}}} |Df|^2 \right) \cdot \delta^2, \quad (208)$$

其中最後的不等式將在這 Lemma A 之後的 Lemma B 中證明。同時，

$$\int_U |Df - Dh|^2 = \int_{N_{\bar{\delta}}} |Df(1-\eta) - f(D\eta)|^2 \leq C \left(\int_{N_{\bar{\delta}}} |Df|^2 + f^2 |D\eta|^2 \right), \quad (209)$$

此後像上式中出現的係數 C ，將表示不定的常數，與 δ 、 (x, r) 、函數 f 、 h 等都無關，例如 C 為 $2C$ ，為 2 ，為 L ，為 $1+L^2$ 等等，只是為了避免與探討中的議題無關緊要的常數。注意 $\int_U |Df|^2 < \infty$ ，理由是 $f \in W^{1,2}(U)$ 。易知

$$P(\bar{\delta}) := \int_{N_{\bar{\delta}}} |Df|^2 \rightarrow 0, \quad \text{當 } \bar{\delta} \rightarrow 0. \quad (210)$$

設(209)式最後一項記為

$$W := \int_{N_{\bar{\delta}}} f^2 \cdot |D\eta|^2. \quad (211)$$

這是我們要估計的關鍵項，也是最難估計的一項。在以下 Step 3 中，我們將證明

$$|D\eta|^2 \leq \frac{C}{\delta^2}. \quad (212)$$

然後利用下述的 Lemma B，得證

$$W \leq \left(\int_{N_{\bar{\delta}}} f^2 \right) \frac{C}{\delta^2} \leq \left(\int_{N_{\bar{\delta}}} |Df|^2 \right) \frac{\delta^2}{2} \cdot \frac{C}{\delta^2} = CP(\bar{\delta}) \rightarrow 0 \quad (213)$$

當 $\delta \rightarrow 0$ 。今給定 $\varepsilon > 0$ ，綜上所述，我們可以選擇 $\delta > 0$ ，使得

$$\|f - h\|_{W^{1,2}(U)}^2 = \int_U |f - h|^2 + \int_U |Df - Dh|^2 < \delta. \quad (214)$$

Step 3. 易知

$$\begin{aligned} |D\eta|^2 &= 2(|D_x \eta|^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial r}\right)^2) \\ &= 2 \left[\eta'_0 \left(\frac{r - x(x)}{\delta} \right) \right]^2 \left(\left(\frac{-1}{\delta} |D_x w| \right)^2 + \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 \right) \leq \frac{2C_1}{\delta^2} (1 + |D_x w|^2), \end{aligned} \quad (215)$$

其中 C_1 為 $|\eta'_0|^2$ 的上界，它與 δ 無關。今證

$$|D_x w| \leq L. \quad (216)$$

給定 $x \in V$ ，對於足夠接近於 x 的點 $z \in V$ ，我們可以估算得

$$\begin{aligned} |w(z) - w(x)| &= \left| \int_V \bar{u}(y) \varphi_\alpha(y - z) dy - \int_V \bar{u}(y) \varphi_\alpha(y - x) dy \right| \\ &= \left| \int_{B_\alpha(z)} \bar{u}(z + \zeta') \varphi_\alpha(\zeta') d\zeta' - \int_{B_\alpha(x)} \bar{u}(x + \zeta) \varphi_\alpha(\zeta) d\zeta \right| \\ &= \left| \int_{B_\alpha(0)} |\bar{u}(z + \zeta) - \bar{u}(x + \zeta)| \varphi_\alpha(\zeta) d\zeta \right| \leq L \cdot |z - x|. \end{aligned} \quad (217)$$

讓 $z \rightarrow x$ ，得(216)式。因此

$$|D\eta|^2 \leq 2C_1 \frac{1 + L^2}{\delta^2} = \frac{C}{\delta^2}. \quad (218)$$

■

Lemma B 設 (U, Γ, V) 為一個 Lipschitz simple domain [見定義 6A 與(200)式]。對 $\delta > 0$ ，設 N_δ 表 Γ 在 U 中的 δ -鄰域 [如(203)式]。給定 Sobolev 函數 $f \in W^{1,2}(U)$ ，設 $f \in \mathcal{F}(U)$ ，則有估計式

$$\int_{N_\delta} f^2 \leq \left(\int_{N_\delta} |Df|^2 \right) \cdot \frac{\delta^2}{2}, \quad (219)$$

其中 $P(\delta) := \int_{N_\delta} |Df|^2 \rightarrow 0$ ，當 $\delta \rightarrow 0$ 。

證明： 記 $f = f(x, r)$ ， $x \in V$ 且 $u(x) < r < u(x) + \delta$ 。取 $\bar{r} = r - u(x)$ ，則

$$\begin{aligned} \int_{N_\delta} f^2 dr dx &= \int_V \left(\int_0^\delta f(x, \bar{r})^2 d\bar{r} \right) dx \\ &= \int_V \int_0^\delta \left(\int_0^{\bar{r}} f_r(x, s) ds \right)^2 d\bar{r} dx \equiv I, \end{aligned} \quad (220)$$

其中 f_r 表 $\frac{\partial f}{\partial r}$ 。但

$$\left(\int_0^{\bar{r}} f_r(x, s) ds \right)^2 \leq \left(\int_0^{\bar{r}} f_r^2 ds \right) \cdot \bar{r} \leq \left(\int_0^{\bar{r}} |Df|^2 ds \right) \cdot \bar{r}. \quad (221)$$

因此，

$$\begin{aligned} I &\leq \int_V \int_0^\delta \left(\int_0^{\bar{r}} |Df|^2 ds \right) \bar{r} d\bar{r} dx \\ &= \int_V \left(\int_0^\delta |Df|^2 ds \right) \left(\int_0^\delta \bar{r} dr \right) dx \\ &= \int_V \left(\int_0^\delta |Df|^2 ds \right) dx \cdot \frac{\delta^2}{2} = \left(\int_{N_\delta} |Df|^2 \right) \cdot \frac{\delta^2}{2}. \end{aligned} \quad (222)$$

注意上述 $(x, r) \mapsto (x, \bar{r})$ 的坐標變換並非 diffeomorphism。但因計算過程中只涉及 Fubini 定理的運用，「是不是 diffeomorphism？」事實上無關緊要。 ■

估計(211)式的 $W = \int_{N_\delta} f^2 \cdot |D\eta|^2$ ，對於 Observation Z 的證明非常關鍵。先看局部形式，關注最簡單的一維 domain，即 M^n 中的 $n = 1$ ，就已經興味盎然。例如考慮： $U =$ 開區間 $(0, a) \subset \mathbb{R}^1$ ，而 $f(r) = r^\alpha$ ， $r \in (0, a)$ 而 $1/2 \leq \alpha < 1$ 。知 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial r} = \infty$ 。顯然 $f \in W^{1,2}(U)$ iff $1/2 < \alpha$ 。對 $f(r) = r^\alpha$ ，直接估算其 W 值：知當 $f(r) = r^{2/3}$ 時，得 $W = C\delta^{1/3}$ 。而當 $f(r) = r^{3/5}$ 時， $W = C\delta^{1/5}$ 。至於 $\alpha = 1/2$ 之時，即 $f(r) = r^{1/2}$ 時， W 則無法隨著 δ 趨於 0，更遑論要控制它的 order：

$$\int_0^\delta f_r^2 dr = \frac{1}{4} \int_0^\delta \frac{1}{r} dr = \infty,$$

而且

$$W = \int_0^\delta f^2 \cdot |D\eta|^2 dr = \left(\int_0^\delta r dr \right) \cdot \frac{C}{\delta^2} = \frac{C}{2}, \quad (223)$$

這是非零的常數，不會隨 δ 一起趨於 0。

另一方面，當 $n \geq 1$ ，domain U 的邊界 Γ 是否 Lipschitz 則變成估計 W 的關鍵。例如考慮 $n = 2$ ， $V = (-1, 1)$ 。假如 Γ 不是 Lipschitz，譬

如說 $u(x) = |x|^\beta$ ，其中 $0 < \beta < 1$ ，使得 Γ 在 $x = 0$ 處是個 cusp。[見圖 30.9]，則逼近 $u(x)$ 的 $w(x)$ 其 $|D_x w|$ 並無固定上界 L ，而當 $\delta \rightarrow 0$ 時， $|D_x w|$ 趨於無窮，因此 $|D\eta|^2 \leq C/\delta^2$ 的估計不成立。這現象的幾何意義是當 $\delta \rightarrow 0$ 時， $r = w(x)$ 的切線 τ 幾乎平行於 r -曲線，這使得 $|D_x \eta|^2$ 在階秩 (order) 的意義上，大於 C/δ^2 。然而，如果 Γ 是 Lipschitz，則 $r = u(x)$ 的 Lipschitz 條件，會逼近其切線 τ 與 r -曲線保持一個非零的角度。因此 $|D\eta|^2$ 可以控制如(212)式，其估計的細節已敘明如(215)式。



τ tends to be vertical.

圖 30.9

現今我們用 partition of unity 來整合以局部形式 (U_i, Γ_i, V_i) 呈現的 Lemma A。

§7.2 Observation Z 的證明

Step 1. 對每一點 $p \in \partial D$ ，在 M^n 中取一 open set \tilde{U}_p 使得 $p \in \tilde{U}_p \subset M^n$ 。因 ∂D 為 compact，故 ∂D 的 cover $\{\tilde{U}_p; p \in \partial D\}$ 存在 $\{\tilde{U}_{p_1}, \dots, \tilde{U}_{p_m}\}$ ，其中 $p_j \in \partial D$ 。注意 $\forall j = 1, \dots, m$ ， $\tilde{U}_{p_j} \cap D$ 有可能是有限多個 components U_1, U_2, \dots, U_F 的 disjoint union，而且每一個 component 都是 simple domain。考慮所有這些 U_{p_j} 中的 components， $j = 1, \dots, m$ ，而把它們重新改記成

$$U_1, U_2, \dots, U_\nu, \quad (224)$$

而製作出一系列的 Lipschitz simple domain (U_i, Γ_i, V_i) ，其中 $\partial D \subset \bigcup_{i=1}^\nu \Gamma_i$ 。若早先適當的內縮 \tilde{U}_{p_j} ，我們可以假定每個 (U_i, Γ_i, V_i) 皆為“standard” Lipschitz simple domain [如(200)式]。設 $Q := D - (U_1 \cup$

$U_2 \cup \dots \cup U_\nu$)。取 U_0 在 D 中 open 且 $Q \subset U_0 \subset\subset D$ ，後者即指 $\bar{U}_0 \subset D$ 之意 $\bar{U}_0 \subset D$ 。記 $U'_i := U_i \cup \Gamma_i, \forall i = 1, \dots, \nu$ 。則 $\{U_0, U_1, \dots, U_\nu\}$ 為 D 的 open cover，而且 $\{U_0, U'_1, \dots, U'_\nu\}$ 為 \bar{D} 的 cover。

Step 2. 現今對 $\{U_0, U_1, \dots, U_\nu\}$ 製作一個 partition of unity，但需把每一個 U_i 再內縮成 G_i 。我們先定義一個“相對於 D 的內縮”的概念如下：當 A 與 B 皆 open in D ，若有 M^n 上兩 open sets \tilde{A} 與 \tilde{B} ，使得 $A = \tilde{A} \cap D, B = \tilde{B} \cap D$ ，而且在 M^n 中 $\tilde{A} \subset\subset \tilde{B}$ ，則記 $\tilde{A} : \subset\subset \tilde{B}$ 。取 $K_1 := D - \{U_2 \cup U_3 \cup \dots \cup U_\nu \cup U_0\} \subset U_1$ 。又取 G_1 在 U_1 中 open，且 $K_1 \subset G_1 : \subset\subset U_1$ 。同理，取 $K_2 := D - \{G_1 \cup U_3 \cup U_4 \cup \dots \cup U_\nu \cup U_0\} \subset U_2$ 。再取 G_2 在 U_2 中 open，且 $K_2 \subset G_2 : \subset\subset U_2$ 。如此類推，取得 $G_i : \subset\subset U_i, \forall i = 1, 2, \dots, \nu$ 。最後取 open set $G_0 \subset\subset U_0$ ，使 $G_0 \supset D - \{G_1 \cup \dots \cup G_\nu\}$ 。我們得到 D 的另一個 open cover $\{G_0, G_1, \dots, G_\nu\}$ 。[見圖 30.10]。

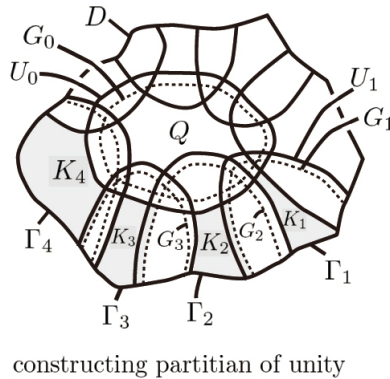


圖 30.10

今對任何 $i = 0, 1, \dots, \nu$ ，定義 $\psi_i \in C^\infty(D)$ ，使得 $\psi_i \equiv 1$ 在 G_i 上； $\psi_i \equiv 0$ 在 $D - U_i$ 上；而在全 D 上有 $0 \leq \psi_i \leq 1$ 。容易看出： $\forall p \in D, \exists \psi_i$ 使得 $\psi_i(p) = 1$ ，此因 $\{G_0, G_1, \dots, G_\nu\}$ cover D 本身。所以，在 D 上 $\psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_\nu > 1$ 。取 $\varphi_i := \psi_i / (\psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_\nu) \in C^\infty(D)$ 。我們便得到 partition of unity

$$1_D = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_\nu, \quad (225)$$

其中 $\text{supp } \varphi_i \subset U_i, \forall i = 0, 1, \dots, \nu$ 。

Step 3. 給定 $f \in \mathcal{F}(D) \cap W^{1,2}(D)$ ，我們即將證明： $\forall \varepsilon > 0, \exists h \in C_c^\infty(D)$ 滿足

$$\|f - h\|_{W^{1,2}(D)} = O(\varepsilon), \quad (226)$$

通常 $O(\varepsilon)$ 表示某個量 $O(\varepsilon)$ ，這個量滿足 $O(\varepsilon) \rightarrow 0$ 當 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。又 $o(\varepsilon)$ 則表示某個量 $o(\varepsilon)$ ，這個量 $o(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ 。由 Lemma A，知 $\forall i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ ， \exists 一個 cut-off function $\eta_i \in C_{\Gamma_i}^\infty(U_i)$ ，使得 $\|f - h_i\|_{W^{1,2}(U_i)} = O(\varepsilon)$ ，其中 $h_i := f \cdot \eta_i$ 。今設 $h_0 := f|_{U_0} \in C^\infty(U_0)$ ，並定義

$$h := \varphi_0 h_0 + \varphi_1 h_1 + \dots + \varphi_\nu h_\nu, \quad (227)$$

則 h 在 D 上 smooth。顯然， $\text{supp } \varphi_0 h_0 \subset U_0 \subset\subset D$ ， $h_i = f \cdot \eta_i \in C_{\Gamma_i}^\infty(U_i)$ ，且 $\text{supp } \varphi_i h_i \subset\subset D, \forall i = 1, 2, \dots, \nu$ 。因此 $\text{supp } h \subset\subset D$ 而知 $h \in C_c^\infty(D)$ 。容易看出

$$f - h = \varphi_1(f - h_1) + \dots + \varphi_\nu(f - h_\nu), \quad (228)$$

此因 $\varphi_0(f - h_0) \equiv 0$ 。今估計 $\|f - h\|_{W^{1,2}(D)}^2$ 如下：

$$\begin{aligned} & \|f - h\|_{W^{1,2}(D)} \\ & \leq C \sum_{i=1}^{\nu} \left\{ \int_{U_i} \varphi_i^2 |f - h_i|^2 + \int_{U_i} \varphi_i^2 |Df - Dh_i|^2 + \int_{U_i} |D\varphi_i| \cdot |f - h_i|^2 \right\} \\ & \leq C \sum_{i=1}^{\nu} \|f - h\|_{W^{1,2}(U_i)} = O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (229)$$

此因 φ_i^2 與 $|D\varphi_i|^2$ 在 U_i 之外全等於 0，又 $\varphi_i^2 \leq 1$ 與 $|D\varphi_i|^2 < C$ ，皆與 ε 無關。注意(229)式最後的不等式源自 Lemma A。因此我們證得了 Observation Z 的第一式（即(197)式）：

$$E(D) = W_0^{1,2}(D). \quad (230)$$

Step 4. 現在我們必須有 volume constraint 下的 Observation Z，即其第二式（即(198)式）：

$$H(D) = \mathcal{G}_c(D) \text{ 在 } W^{1,2}(D) \text{ 中的 closure.} \quad (231)$$

亦即我們要證得：給定 $f \in H(D) \equiv \mathcal{G}(D) \cap W^{1,2}(D)$ ， $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \tilde{h} \in \mathcal{G}_c(D)$ 使得

$$\|f - \tilde{h}\|_{W^{1,2}(D)} = O(\varepsilon). \quad (232)$$

我們仍然取 Step 2 中的 $h_i := f \cdot \eta_i$ 於 U_i 中， $i = 1, 2, \dots, \nu$ 。而且取 $h_0 := f$ 於 U_0 上。今定義 $\eta_0 \in C^\infty(U_0)$ 使 $\eta_0 \equiv 1$ 於 U_0 上，而取

$$\eta := \varphi_0 \eta_0 + \varphi_1 \eta_1 + \dots + \varphi_\nu \eta_\nu. \quad (233)$$

取 $\delta > 0$ ，使 $\delta > 4\delta_i$ ， $\forall i = 1, 2, \dots, \nu$ ，其中 $\delta_i > 0$ 如前。又考慮 $D_\delta := D - N_\delta \subset\subset D$ ，這裡 N_δ 為 ∂D 在 D 中的 δ -tubular 鄰域。設 h 由(227)式給定，並取

$$\tilde{h} := h - \mu\eta; \quad \mu := \frac{\int_D h}{\int_D \eta}. \quad (234)$$

顯然， $h = \varphi_0 f + \varphi_1 f \eta_1 + \dots + \varphi_\nu f \eta_\nu = f\eta \in C_c^\infty(D)$ ，而且由(234)式知 $\int_D \tilde{h} = 0$ 。因此 $\tilde{h} \in \mathcal{G}_c(D)$ 。

Step 5. 注意 μ 可以隨著 δ 而很小：由於 $f \in \mathcal{G}(D)$ ，知 $\int_D f = 0$ ，

$$\begin{aligned} \left| \int_D f\eta \right| &= \left| \int_{D_\delta} f + \int_{D-D_\delta} f\eta \right| = \left| \left(\int_D f - \int_{D-D_\delta} f \right) + \int_{D-D_\delta} f\eta \right| \\ &= \left| \int_{D-D_\delta} f(-1 + \eta) \right| \leq \int_{D-D_\delta} |f|. \end{aligned} \quad (235)$$

由 Lemma A 知

$$\left| \int_D f\eta \right|^2 \leq \left(\int_{N_\delta} |f| \right)^2 \leq \left(\int_{N_\delta} f^2 \right) \cdot |N_\delta| \leq C(P(\delta) \cdot \delta^2) \cdot \delta. \quad (236)$$

因此

$$|\mu|^2 = \frac{\left| \int_D f\eta \right|^2}{\left| \int_D \eta \right|^2} = o(\delta^3) \rightarrow 0, \quad (237)$$

當 $\delta \rightarrow 0$ 時。於是我們有了如下的估計：

$$\int_D |f - \tilde{h}|^2 \leq C \left(\int_D |f - h|^2 + \int_D |\mu\eta|^2 \right) \leq C \int_D |f - h|^2 + o(\delta^3), \quad (238)$$

$$\int_D |Df - D\tilde{h}|^2 \leq C \left(\int_D |Df - Dh|^2 + \int_D \mu^2 |D\eta|^2 \right). \quad (239)$$

得

$$\|f - \tilde{h}\|_{W^{1,2}(D)}^2 \leq C \left(\|f - h\|_{W^{1,2}(D)}^2 + \mu^2 \int_D |D\eta|^2 + o(\delta^3) \right). \quad (240)$$

利用(218)式 $|D\eta|^2$ 的估計與(241)式，知上式 $\mu^2 \int_D |D\eta|^2 = o(\delta^3 \cdot \frac{1}{\delta^2}) = o(\delta) \rightarrow 0$ ，當 $\delta \rightarrow 0$ 。但在 Step 3 我們已證得(229)式，故由(243)式歸納得所求(232)式。因此，Observation Z 證明完成。 ■

§7.3 Observation Z 的第二證明

Observation Z 的第二證明，是把原來給定在 Lipschitz domain D 上的問題，歸給為 smooth domain \tilde{D} 之上，使得 $\tilde{D} \subset\subset D$ ，而且 $S := \partial D'$ 落在

$$(\partial D)^\delta := \{p \in D; \text{dist}(p, \partial D) < \delta\}, \quad \delta > 0 \quad (241)$$

之中。對 S 上一點 p ，考慮 $\text{map}: x \in S \xrightarrow{\alpha} x + t\nu \in \tilde{D}$ ，其中 $t \in \mathbb{R}$ ， $t \geq 0$ ，且 $\nu = \nu(x)$ 為 S 在 x 點指向 \tilde{D} 內部的 unit normal。設 $t_0 > 0$ 為最小的 t ，使 $\text{map } \alpha$ 在 x 點為 singular，此時稱 $\tilde{p} = x + t_0\nu(x)$ 為 x 點時的 focal point，記 $s(x) := t_0$ 。定義 s 的 focal distance

$$\bar{s} := \min\{s(x); x \in S\}. \quad (242)$$

如果內縮的 \tilde{D} ，其邊界 S 的 focal distance \bar{s} 滿足 $\bar{s} \geq C\delta$ ， C 與 δ 及 x 無關，則我們能製作出 $\tilde{\eta} \in C_c^\infty(D)$ ，其 $|D\tilde{\eta}|^2$ 可以被控制，如前所述，其中 $\tilde{\eta} \equiv 0$ 於 $t \leq \delta$ ； $0 \leq \tilde{\eta} \leq 1$ 於 $\delta \leq t \leq 2\delta$ ，而且在 D 上的其他地方皆 $\tilde{\eta} \equiv 1$ 。

給定 $f \in \mathcal{F}(D) \cap W^{1,2}(D)$ 。 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $h := f \cdot \tilde{\eta}$ ，可以選取足夠小的 $\delta > 0$ ，而證得

$$\|f - h\|_{W^{1,2}(D)} = O(\varepsilon), \quad (243)$$

這是以下要做的事。注意：與第一證明一樣， ∂D 的 Lipschitz 條件是控制 $|D\tilde{\eta}|^2$ 的關鍵條件。例如：考慮 $n = 2$ ，而且局部的考慮 (U, Γ, V) ， $\Gamma \subset \partial D$ 為 $r = u(x) = |x|^\alpha$ ， $x \in V$ ，的函數圖形，其中 $0 < \alpha < 1$ 。所以在 $x = 0$ 點有 cusp $(x, r) = (0, 0)$ ，如圖 30.11，其中 (x, r) 表 D 在 cusp $(0, 0)$ 點附近的局部坐標，只是這裡 ∂D 並非 Lipschitz，而且 focal distance $\bar{s} = o(\delta)$ 。不難看出 $|D\tilde{\eta}|^2 \neq O(1/\delta^2)$ ，因而當 $\delta \rightarrow 0$ 時， $|D\tilde{\eta}|^2 \delta^2 \rightarrow \infty$ 。因此在這個例子中， $h \equiv f \cdot \tilde{\eta}$ 並不趨於 f 於 $W^{1,2}(D)$ 中，當 $\delta \rightarrow 0$ 。



focal distance \bar{s} tends
to be as small as $o(\delta)$

圖 30.11

Lemma C 給定 Lipschitz simple domain (U, Γ, V) 與一小正數 $\delta > 0$ 。如 Lemma A 的 Step 1，取 $r = \bar{u}(x) = u(x) + 2\delta$ ， $x \in V$ 。考慮函數 $\bar{u}(x)$ 的 smooth 逼近函數 $w_\alpha(x)$ ，如 Lemma A 中的(200)式。爲了簡化計算不妨設 $n = 2$ ，選 $\alpha = \delta/L$ ，可導得：

(i) $|w_\alpha(x) - \bar{u}(x)| \leq L \cdot \alpha = \delta$ ，且

$$|w''_\alpha(x)| \leq C_2 L^2 / \delta, \quad (243)$$

其中 $C_2 := \max\{\varphi''(x); -1 \leq x \leq 1\}$ ， L 爲 $u(x)$ 的 Lipschitz 常數，而 φ 爲一般標準化的 mollifier。

(ii) 取 $\alpha = \delta/L$ ，且 $C = 1/(C_2L^2)$ ，則 $w_\alpha(x)$ 的 minimal focal distance $\bar{s} \geq C\delta$ 。

證明： 其計算很直接：取 $\alpha = \delta/L$ ，則 (i) 中的第一不等式即為(200)式；又第二不等式(243)式也不難估算。其中注意有：

$$\int_V \bar{u}(x) \varphi''\left(\frac{y-x}{\alpha}\right) dy = \alpha \bar{u}(x) \left[\varphi'\left(\frac{y-x}{\alpha}\right)\right]_{x-\alpha}^{x+\alpha} = 0. \quad (244)$$

至於 (ii) 中的 \bar{s} ，容易看出

$$|k(x)| = |w''_\alpha(x)/\sqrt{1+w'_\alpha(x)^2}| \leq |w''_\alpha(x)| \leq C_2L/\alpha = C_2L^2/\delta, \quad (245)$$

其中 $k(x)$ 表示 $r = w_\alpha(x)$ 在 x 點的線曲率 (line curvature)。相應的，曲線 $r = w_\alpha(x)$ 在任何 $x \in V$ 點上的曲率半徑 $R(x)$ 為 $1/k \geq \alpha/(C_2L) = C\delta$ ，其中 $C := 1/(C_2L^2)$ 。因此，

$$\bar{s} = \inf\{R(x); x \in V\} \geq C\delta, \quad (246)$$

此即為所求。 ■

Lemma C 對於一般的維數 n ，也會有類似的估計。只是符號會變得繁瑣。現今我們來完成 Observation Z 的第二證明。仍然從局部的 Lipschitz simple domain (U_i, Γ_i, V_i) 著手，製作 $\tilde{\eta}_i \in C^\infty_{\Gamma_i}(U_i)$ ， $i = 1, \dots, \nu$ 。如前述，考慮逼近 $r = \bar{u}(x)$ 的 smooth surface S_i ，這裡 S_i 為 $r = w_i(x)$ 的 graph，記 S_i 上的最小 focal distance 為 \bar{s}_i 。由 Lemma C， $\exists C_0$ ，使 $0 < C_0 < 1$ 且 $\bar{s}_i > 2C_0\delta$ ， $\forall i = 1, \dots, \nu$ 。定義 $\tilde{\eta}_i$ 使

$$\tilde{\eta}_i(p + t\nu) = \tilde{\eta}_0(t/(C_0\delta)), \quad (247)$$

其中 $\tilde{\eta}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ 為 \mathbb{R}^1 上標準的 cut-off 函數，使得 $\tilde{\eta}_0(x) \equiv 0$ 於 $x \leq 0$ ； $0 \leq \tilde{\eta}_0(x) \leq 1$ 於 $0 \leq x \leq 1$ ；而且 $\tilde{\eta}_0(x) \equiv 1$ 於 $x \geq 1$ 。取 $h_i := f\tilde{\eta}_i$ ， $\forall i = 1, \dots, \nu$ 。像在第一證明那樣，引入 partition of unity

$$\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_\nu\} \quad (248)$$

並定義 h 如(227)式，知 $h \in C_c^\infty(D)$ 。顯然 $|D\tilde{\eta}_i|^2 = |D_t\tilde{\eta}_i|^2 \leq \tilde{C}_1/(C_0^2\delta^2)$ ，其中 \tilde{C}_1 表 $|\tilde{\eta}'_0|^2$ 的上界，與 δ 無關。證明中所剩的部份，基本上與第一證明相同。至於有 volume constraint (體積制限) 的情況，也是一樣。

對於兩種證明，現在來做點總結。兩者都基於下列兩個關鍵點：

(i) $|D\eta|^2$ 與 $|D\tilde{\eta}|^2$ 的估計，基本上都依賴 ∂D 的 Lipschitz 條件才有可能。支持它們估計的論述，一為 Lemma A，另一為 Lemma C。

(ii) 當 domain D 退化成 1 維 (one-dimensional)，即 $n = 1$ ，則 ∂D 的 Lipschitz 條件失去意義，此時 Observation Z 的證明，關鍵點變成 $\int_{N_\delta} f^2$ 的估計，其論述則為 Lemma B。

我們可以考慮第三個證明：亦即依幾何測度論處理 Lipschitz domain D 慣用的手法。把邊界 ∂D 局部拉平，但此時 η 與 h 要弄成 smooth，則是逃不掉的新功課。這技巧的細節，請參考胡亦行的短文 [Hi]，他試圖引用 Evans–Gariepy [E-G] 書中的結果 (Cor. 1.5.1.6)，直接估算(243)式。

§7.4 (引理 A 的證明)

我們終於來到本章技巧上最困難的部分：針對 Sobolev 空間 H_t 的連續性，要開始進入其證明的核心。在以下證明過程中，隨時參酌前述 set-continuity 的定義，及幾個關鍵的例子，才見得其巧妙。

Step 1 先證明 $H_t = \bigcap_{r>t} H_r$ ：“ \subset ” 很明顯，因為 $H_t \subset H_r, \forall r > t$ 。反過來要證明 “ \supset ”，我們將利用 $\overline{D(t)} = \bigcap_{r>t} \overline{D(r)}$ 。給定 $g \in \bigcap_{r>t} H_r$ ，不難證明 $\text{supp } g \subset D(t)$ 。理由是：

(i) 對於 M^n 上的一個開集 (open set) V ，若 $\overline{V} \cap \overline{D(t)} = \emptyset$ ，則可以找到 $r' > t$ 使得 $\overline{V} \cap D(r') = \emptyset$ 。假設不然，則存在 r_n 與 x_n ，其中 $r_n > t$ ，而趨於 t ，且 $x_n \in \overline{V} \cap D(r_n)$ 。選一個 convergent subsequence，為了方便，仍把它記成 x_n ，使得它趨於 \overline{V} 中的某一點 x_0 。給定 $r > t$ ，存在 N 使得 $r > r_n > t, \forall n > N$ 。於是 $x_n \in D(r_n) \subset D(r)$ ，並得知 $x_0 = \lim_n x_n \in \overline{D(r)}$ 。根據 set-continuity，可以看出 $x_0 \in \bigcap_{r>t} \overline{D(r)} =$

$\overline{D(t)}$ 。這就違背了 $\overline{V} \cap \overline{D(t)} = \phi$ 的假設。注意這段論證並不適用於 §5 圖 30.4 的例子，因為那個例子並不滿足 $\bigcap_{r>t} \overline{D(r)} = \overline{D(t)}$ 。

(ii) 假設存在 M^n 中的一個開集 V ，使得 $\overline{V} \cap \overline{D(t)} = \phi$ ，而且 $g \neq 0$ a.e. on V 。根據 (i)，知 $\exists r' > t$ 使得 $\overline{V} \subset M^n - D(r')$ 。則 $g \notin H_{r'}$ ，違反了 $g \in \bigcap_{r>t} H_r$ 的假定。因此， $\text{supp } g \subset \overline{D(t)}$ 。由於 set-continuity，知 $\overline{D(t)}$ 的內集 (interior) $\text{int}(\overline{D(t)}) = \overline{D(t)} - \partial(\overline{D(t)}) = \overline{D(t)} - \partial(D(t)) = D(t)$ 。因此 $\text{supp } g \subset D(t)$ 且 $g \in L^2(D(t))$ 。

(iii) 顯然 $\int_{D(t)} g = 0$ ，此因 $g \in H_r \forall r > t$ ；而且 $\text{supp } g \subset D(t)$ 。

Step 2 不難看出 g 有弱微分 $h_i := D_i g \in L^2(D(t))$ ， $\forall i = 1, \dots, n$ 。事實上，由於 $g \in H_r, \forall r > t$ ，存在 $h_i \in L^2(D(r))$ 使得

$$\int_{D(r)} g \cdot D_i \varphi = - \int_{D(r)} h_i \cdot \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D(r)) \quad (249)$$

成立。先說明 $h_i|_{D(r) - \overline{D(t)}} = 0$ ：假設有開集 $U \subset D(r) - \overline{D(t)}$ 使得 $h_i \neq 0$ a.e. on U 。取 $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D(r))$ 滿足 $\overline{\text{supp } \varphi} \subset U$ 與 $\int_U h_i \cdot \varphi \neq 0$ 。這與 (249) 式矛盾，因為根據上述 Step 1，式子的左端 = 0，但右端 $\neq 0$ 。得知 $h_i \in L^2(D(t))$ 為 g 在 $D(t)$ 中的弱微分，故 $g \in H_t$ 。

Step 3 我們來到這個最細緻也最巧妙的部分。欲證得 $g \in H_t$ ，我們需證明 g 的 trace Tg 在邊界 $\partial(D(t))$ 的值為 0。論證如下：

(i) 因 $g \in \bigcap_{r>t} H_r$ ，故存在 $f_n \in \mathcal{G}_c(D(r_n))$ ，其中 $r_n \searrow t$ ，使得 $\|f_n - g\|_{H_b}^2 < 1/n$ ，其差值趨於 0，當 $n \rightarrow \infty$ 。今聲稱 $\lim_n f_n|_{\partial(\overline{D(t)})} = 0$ 。記 $U \equiv D(b) - \overline{D(t)}$ ，得 $\|f_n\|_{H(U)}^2 = \|f_n - g\|_{H(U)}^2 \leq \|f_n - g\|_{H_b}^2 \rightarrow 0$ ，當 $n \rightarrow \infty$ 。注意： $g \equiv 0$ a.e. on U 。

(ii) 一般來說，給定 $f \in \mathcal{F}(U)$ ， $U \equiv D(b) - \overline{D(t)}$ ， $\Gamma \equiv \partial\overline{D(t)} \cap \overline{U}$ ，我們可以證得 $\|f\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \|f\|_{W^{1,2}(U)}^2$ 。設 $p \in \Gamma$ ， $B' \equiv B(p, a/2) \subset\subset B \equiv B(p, a) \subset U$ ， $a > 0$ 。又設 $x = (x', r)$ 為 B^+ 上的 Lipschitz coordinate，其中 $r|_{\Gamma \cap B} = 0$ ，且 $B^+ \equiv \{(x', r) \in B; r > 0\} \subset U$ 。定義 $\zeta \in \mathcal{F}(U)$ ，使得 $\zeta = 1$ 於 B' 中， $\zeta = 0$ 於 $U - B$ ；而且 $0 \leq \zeta \leq 1$

在 U 之上。於是 $\int_{\Gamma \cap B'} |f|^2 dx' \leq \int_{\Gamma \cap B} \zeta |f|^2 dx' \leq - \int_{B^+} \frac{\partial}{\partial r} (\zeta |f|^2) dx \leq C \int_{B^+} (|f|^2 + |Df|^2) dx = \|f\|_{W^{1,2}(B^+)}^2$ 。由於 Γ 為緊緻，我們證得 (ii) 一開始所聲稱的不等式。

(iii) 因為 $\|f_n\|_{W^{1,2}(U)}^2 \rightarrow 0$ ，由 (ii) 知 $\int_{\Gamma} \|f_n\|^2 \rightarrow 0$ 。故 f_n 在 $L^2(\Gamma)$ 上收斂於 0。所以 $\lim_n f_n = 0$, a.e. on Γ 。記 $\Gamma' \equiv \overline{\partial D(t)} - \Gamma$ 。根據 set-continuity 的附加條件： $\overline{\partial D(t)} = \overline{\partial(\bigcap_{r>t} D(r))}$ ，此即(??)式，我們知道： Γ' 是 $\overline{\partial D(t)}$ 與所有 $\overline{\partial D(r)}$ 重疊的部份，其中 $r > t$ 。但 $f_n \in \mathcal{G}_c(D(r_n))$ ，故 $f_n \equiv 0$ 於 Γ' 上。亦即：在 $\overline{\partial D(t)}$ 的整個邊界 $\overline{\partial D(t)}$ 上，有 $\lim_n f_n = 0$ 。

(iv) 但我們還不確定在 $\partial D(t)$ 上， $\lim_n f_n = 0$ ，因為 $\partial(\overline{D(t)}) \subsetneq \partial D(t)$ ，參見例 4 中的 \mathcal{D}'_I 。這是引理 A 及本章主要定理的關鍵：遞增族中的 domain $D(t)$ ，其 topological type 容許因 t 而變動，這如何可能？我們正在處理這問題的關鍵。如果把 g 看成 $D(t)$ 上的 Sobolev 函數，到目前我們還不能論斷：在整個 $\partial D(t)$ 上，有 $\text{trace } Tg = \lim_n f_n = 0$ 。注意在例 4 中的 \mathcal{D}_I 之中，直線段 $L_0 \subset \partial D(t)$ 並不包含於 $\overline{\partial D(t)}$ 。但當 \mathcal{D}_I 滿足 set-continuity 的附加條件，即 $\partial(\overline{D(t)}) = \partial D(t)$ ，則知 $\lim_n f_n = 0$ on $\partial D(t)$ ，而且在整個 $\partial D(t)$ 上， $\text{trace } Tg = \lim_n f_n = 0$ 。這就等價於 g 在 $D(t)$ 的邊界值為 0，因此得 $g \in H_t$ 。

(v) 爲了使論證完整，我們不憚其煩，對最後這事再多加說明：取 $h := f_n \eta - \mu \eta$ ，其中 η 爲一適當的 cut-off 函數，然後模仿 Observation Z 中的論述，在 H_t 中估計 $\|h - f_n\|^2$ 。容易證知 $h \in \mathcal{G}_c(D(t))$ 可以在 H_t 中無限接近 g ，當 $n \rightarrow \infty$ 。因而得證 $g \in H_t$ 。注意在上述估計中，(??) 式的 f 現今需代以 f_n 。這就證明了 Sobolev 空間連續性的一半，亦即證明了引理 A 中的前半 $H_t = \bigcap_{r>t} H_r$ 。

Step 4 今證明引理 A 的後半，即 $\overline{\bigcup_{s<t} H_s} = H_t$ 。先說明“ \subset ”：給定 $f \in \overline{\bigcup_{s<t} H_s}$ 。注意“closure”是在 H_b 之中取得，這裡我們仿前述定義，視 $H_s \subset H_b, \forall s \leq b$ 。容易看出 $\text{supp } f \subset D(t)$ 。假設不然，則存在 M^n 中的開集 $U \subset D(b) - \overline{D(t)}$ ，使得 $\int_U |f|^2 = c > 0$ 。由 f 的假定， $\exists s_0 < t$ 與 $h_0 \in H_{s_0}$ 使得 $\|f - h_0\|_{H_b}^2 < c/2$ 。這與 $\|f - h_0\|_{H_b}^2 \geq \int_U |f|^2 = c$ 矛盾。

因此 $f \in L^2(D(t))$ 。

Step 5 現在來證明 $f \in H_t$ ：給定 $\varepsilon > 0$ ，取 $\bar{s} < t$ 與 $g \in H_{\bar{s}}$ 使得 $\|f - g\|_{H_b} < \varepsilon/2$ 。根據 Observation Z， $H_{\bar{s}}$ 落在 $\mathcal{G}_c(D(\bar{s}))$ 的 closure 之中；注意這裡的 closure 是在 $W^{1,2}(D(\bar{s}))$ 中取得。因此有 $h \in \mathcal{G}_c(D(\bar{s}))$ 使得 $\|g - h\|_{H_b} < \varepsilon/2$ 成立，其間 $\|\cdot\|_{H_s} = \|\cdot\|_{H_b}$ ， $\forall s \leq b$ 。得知 $\|f - h\|_{H_b} \leq \varepsilon$ ，而 $h \in \mathcal{G}_c(D(\bar{s})) \subset \mathcal{G}(D(t))$ 。這就說明了 f 落在「 $\mathcal{G}(D(t))$ 於 $W^{1,2}(D(t))$ 中的 closure」，但後者即 H_t 。所以 $f \in H_t$ ，此即 $\overline{\bigcup_{s < t} H_s} \subset H_t$ 。這證明必須繞經 Observation Z 是因為一般時候，設 $D(\bar{s})$ 之外的值為 0， $\mathcal{G}(D(\bar{s}))$ 並不包含於 $\mathcal{G}(D(t))$ 之中，但 $\mathcal{G}_c(D(\bar{s})) \subset \mathcal{G}(D(t))$ 卻始終成立。這項觀察很重要。

Step 6 只剩證明“ \supset ”。這裡需用到 set-continuity 的第一條件 $\bigcup_{s < t} D(s) = D(t)$ 。給定 $f \in H_t$ 與 $\varepsilon > 0$ ，根據 Observation Z，存在 $g \in \mathcal{G}_c(D(t))$ 使得 $\|f - g\|_{H_t} < \varepsilon$ 。給定 M^n 中的開集 W 使得 $\overline{W} \subset D(t)$ 。仿 Step 1，容易看出 $\exists s' < t$ 使得 $\overline{W} \subset D(s')$ 。若不然，則 $\forall s_n \nearrow t$ ， $\exists x_n \in D(s_n)^c \cap \overline{W}$ 。取 $\{x_n\}$ 中的收斂子序列，爲了簡便仍記成 $\{x_n\}$ 。設 $x_0 = \lim_n x_n$ 。給定 $s < t$ ，有 $x_n \in D(s_n)^c \subset D(s)^c$ ，其中 n 夠大。於是 $x_0 \in D(s)^c$ ，此因 $D(s)^c$ 在 $\overline{D(b)}$ 爲 close，而 $D(b)$ 爲 relatively compact。得知 $x_0 \in \bigcap_{s < t} D(s)^c = (\bigcup_{s < t} D(s))^c = D(t)^c$ 。這與 $\overline{W} \subset D(t)$ 矛盾。由於所給的 $g \in \mathcal{G}_c(D(t))$ ，知 $\overline{\text{supp } g} \subset D(t)$ 。依上述，知存在 $s' < t$ 使得 $\overline{\text{supp } g} \subset D(s')$ 。所以 $g \in \mathcal{G}_c(D(s')) \subset H_{s'}$ ，這就說明了 $f \in \overline{\bigcup_{s < t} H(s)}$ 。於是我們證完引理 A。 ■

注記 19 有趣的是：上述證明中的 Step 1 與 Step 6，對一般的遞增族，其論證並不成立。例如在 §5 圖 30.4 中考慮那個 open ball V ，只要 $r > t$ ， V 都無法與 $D(r)$ 隔離。同一個圖例中的 W ，對於任何 $s < t$ ，也都與 $D(s)$ 相交。所以上述證明中的 Step 1 與 Step 6 的論述，並非 trivial。事實上，那個圖例，連 Hausdorff 連續都不是，當然也不滿足 set-continuity。值得注意的是：上述證明的 Step 1 與 Step 6，正好證明了：「set-continuity \Rightarrow Hausdorff 連續」這件事。但反之不然。§5 例 4 中

的 \mathcal{D}_I 與 \mathcal{D}'_I 都是有趣的反例。它們為 Hausdorff 連續，但不滿足 set-continuity。

就這樣我們辛苦完成了關於 Sobolev space 連續性的證明。往前回溯，也就證明了「定理 10」關於 λ_k 與 $\tilde{\lambda}_k$ 連續且嚴格下降。神奇的是：遞增族 \mathcal{D} 中的 Lipschitz domain $D(t)$ ，其 topological type 可以變動，但 stability operator 的特徵值 λ_k 與 $\tilde{\lambda}_k$ 竟然還連續。

從這裡再往前回溯，建立了 stability operator 的值譜分析。利用它與特徵值的連續性，我們證明了 Morse index 定理的 cmc 形式 [定理 9]。最後回溯到本章的主要定理 [定理 8]，解決了本章要探討 Jacobi 場分佈的主要問題。

終於，我們走完了這條漫漫長路。