

§ CMC 球面的 Morse index 分析

一個 CMC 曲面 $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ ，其穩定性分析由面積第二變分決定。

$$\delta^2 A(f) = \int_{\Sigma} f L f dA, \text{ 其中 Jacobi 算子: } L = \Delta + |A|^2 + Ric(N, N)$$

對於嵌入於 $\mathbf{R}^3$ 中的球面 S^2

Δ : Laplace-Beltrami operator

$$|A|^2 = 2H^2 = \frac{2}{R^2}$$

$Ric(N, N) = 0$ (因為 $\mathbf{R}^3$ 是歐式空間)

$$\text{所以 } L = \Delta + \frac{2}{R^2}$$

Morse index 有兩種說法：

(1) 體積受限變分 index=1 (均勻膨脹或收縮)， f 要滿足 $\int_{\Sigma} f dA = 0$

(2) 自由變分 index=1+3=4 (包括沿 x, y, z 方向的平移)

換句話說，球面 S^2 的穩定性(抗拒擾動的能力)有兩種說法：

(1) 在給定體積約束下

(2) 無體積約束下

結論是球面為不穩定 CMC 曲面。

註：

$$\text{CMC 曲面, } \delta^2 A(\phi) = \int_{\Sigma} (|\nabla \phi|^2 - (|A|^2 + Ric(N)\phi^2)) d\Sigma$$

$$\text{其中 } |A|^2 = \frac{2}{R^2}$$

$Ric(N)$ 為 Ricci 曲率在法方向的分量，例如 S^2 $Ric(N) = K = \frac{1}{R^2}$

$$J = -\Delta - (4H^2 - K)$$

$L = \Delta$ 與 J 是平移關係。