

§ CMC 曲面的穩定性

丘成桐：The existence of embedded minimal surface and topology of three-dimensional manifolds。

條件：

1. 外圍流形為 compact 3 維流形 N ，具有正 Ricci 曲率
例如 S^3 的 Ricci 曲率為 2。
2. $M \subset N$ 為 compact，可定向的嵌入極小曲面(二維極小子流形)

推測：

在 S^3 中，所有嵌入的極小子流形(如 赤道 S^2 ，Clifford 環面 等)的第一非零 Neumann 特徵值滿足 $\lambda_1(M) = 2$

基於所有座標函數 x_i ，滿足 $\Delta x_i + 2x_i = 0 \rightarrow \text{eigenvalue} = 2$

§ S^3 中的 minimal surface

1. S^3 的赤道 S^2
2. Clifford torus $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2}$
3. Lawson minimal surface
4. Kapouleas-Yang gluing constructions
5. Isoparametric surface 例 $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$
6. Index One minimal surface 2014 年

§ 穩定性

在微分幾何中，穩定性通常指某曲面在變分下是否為局部極小。

對於 CMC 曲面，我們考慮的是，在保持體積不變的情況下，變化面積的二階變分是否為負。

$$\delta^2 A = \int_M (|\nabla f|^2 - (|A|^2 + Ric(N, N))f^2) dA$$

其中 N 是外部空間的 Ricci 曲率，在 $R^{(n+1)}$ 為零。

$$\int_M f dA = 0 \quad f \text{ 是變形函數。}$$