

§ Surfaces of constant mean curvature

先看[常均曲率曲面](#) 梁惠禎的介紹 常均曲率曲面緣起於等周界問題。

Problem of Plateau : [J.Douglas](#) 1897-1965 T.Rado 1895-1965 $H=0$

- (1) 給定常數 V 及平面 P 上的圓 Γ 。通過 Γ 且與 P 包夾體積 V 的所有曲面中，何者面積最小？
- (2) 體積固定的所有封閉曲面中，何者積最小？

Poincare-Hopf index theorem

1. The Hopf theorem 1951 : [H.Hopf](#) 1894-1971 賦與常均曲率曲面一個 holomorphic differential 2-form 。 genus 為 0 的封閉常均曲率曲面必為球面。
2. The Alexandrov theorem 1956-1962 :
嵌入的(embedded)封閉常均曲率曲面必為球面。 [A.D.Alexandre](#) 1912-1999
3. 穩定的封閉常均曲率曲面必為球面 J.L.Barbosa M.do Carmo 1984
4. 某常均曲率 immersed 環面的存在性 H.C.Wente 1986
建立常均曲率曲面與可積系統之關聯。
5. 對任意 genus 構造出封閉 immersed 常均曲率曲面 1991-1992 N.Kapouleas
黏合球面與 Delaunary 旋轉曲面。
6. 結合 Loop groups 與可積系統發展出 DPM method 以構造常均曲率曲面。
[\[GANG Gallery\]](#)

Examples :

1. Minimal surfaces
研究肥皂泡先驅 [Karen Uhlenbeck](#) (1942~)2019 年獲 Abel 獎 用能量定義 minimal surface 從而推廣到 gauge theory
A New Golden Age of [Minimal Surfaces](#) [Joaquin Perez](#)
從[細胞世界](#)看微分幾何 [\[YouTube\]](#)
2. Soap films and soap bubbles
3. Delaunary surfaces

These are rotationally symmetric CMC surfaces , including spheres , cylinders , unduloids, and nodoids 。 They are named after the mathematician Charles Delaunay, who studied them in the context of capillary surface 。

4. Spheres
5. Cylinders

Applications

1. Physics : CMC surfaces model interfaces in fluid dynamics , such as capillary surfaces and membranes 。

2. Materials Science : They describe the shapes of lipid bilayers and vesicles in biological systems .
3. Computer Graphics : CMC surfaces are used in modeling and rendering realistic shapes , such as soap films and bubbles .

Open Problems and Research

1. The classification of complete , embedded CMC surfaces in \mathbf{R}^3 is an active area of research . For example , it is conjectured that the only compact , embedded CMC surfaces \mathbf{R}^3 are spheres (Alexandrov's theorem) .

[參考資料]

1. [Lectures](#)
2. [Examples](#) and structure of CMC surfaces
3. [毛細曲面](#) [薄膜的幾何](#)
4. [Deformations](#) of free boundary CMC hypersurfaces and applications
5. [Lawson [CMC Surfaces](#)] 肥皂泡([soap bubble](#))
6. [Jacobi fields](#) on CMC
7. 大自然的數學遊戲 p.90
8. 從肥皂泡到[液晶生物膜](#) 牛頓出版社 p.120

[[液晶肥皂泡](#)的振盪現象] [[Vibration of a membranes](#)]

9. 牛頓雜誌 1992/9 112 期 p.141
10. 數學與猜想 九章出版社 p.182
11. 數學傳播季刊 Can one hear [the shape of a drum](#) ? Mark Kac(1914-1984)1966 年一個黎曼流形是否由其 Laplace 譜決定 . 1992 年由 Carolyn S. Gordon ,David L. Webb, Scott Wolpert 找到反例 Rayleigh conjection : Lord Rayleigh 薄膜實驗

The Geometry of Membranes Zhanchun Tu (涂展春) [[Zhanchun Tu](#)] [[ResearchGate](#)]

1. Introduction
 2. Preliminary in Mathematics and Physics
 3. Lipid(脂質) vesicle(囊泡)
 4. Lipid Membranes with free Edges
 5. Chiral(掌性) Lipid Membranes
-