§ 簡併度(degeneracy)

§ 01 數論

給定正整數 N，求方程 $x^2+y^2+z^2=N$ ， $x,y,z\geq 1$的解的個數 g(N)

例如(2,1,1)，(1,2,1)，(1,1,2) 平方和=6 所以 g(6)=3

1. 三平方和問題(Legendre 1798)

   一個自然數可表為三個整數的平方和（允許0）若且唯若它不是$4^a(8b+7)$的形式。

我們的問題$x,y,z\geq 1$ 問題更複雜，更有趣。

1. g(N)的生成函數是甚麼？跟 modular forms 有關嗎？
2. g(N)的漸近行為為何？(N 很大時，平均有幾組解？)
3. g(N)有沒有震盪模式？哪些 N 的簡併度特別高？

g(N)的生成函數$\Phi(\mathrm{q})=(\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2})^3=\sum_{N=1}^{\infty}g(N)q^N$ ，與 Jacobiθ函數($\theta_3(q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}$)的關係則$\Phi(q)=(\frac{\theta_3(q)-1}{2})^3=\frac{1}{8}(\ldots)$

漸近行為：當 N 很大時，g(N)的平均表現與球面體積有關，約為$\frac{\pi N}{2}$

§ 02 幾何

球面上的正整數格子點分布$x^2+y^2+z^2=N$

經典結果：球面上的整點個數(允許負數和0)約為$4\pi N$(這是高斯圓問題的高維推廣)。對於正整數解，約為$\frac{\pi N}{2}$ (因為第一卦限佔全空間的1/8)。

§ 03 組合問題 g(N)總是奇數。

§ 04 物理：能階結構與對稱性

在三維無限深方勢阱中，能階$E\propto n_x^2+n_y^2+n_z^2$ ，簡併度 g(N)決定了能階的簡併情形。

能階順序不是單調的：g(9)=3，g(11)=3，但是 g(12)=1。

這意味著能量更高的態可能簡併度更低，甚至出現能階交替。

問題是能否設計一個系統，使其能階簡併度遵循某種數學規律(例如與模形式係數有關。

§ 05 推廣：高維情況與 Waring problem

在 d 維無限深方勢阱中，簡併度對應方程 $n_1^2+n_2^2+...+n_d^2=N, n_i\in Z^+$ 的解的個數。

問題：

當d=2 時，這是圓上的整點問題（高斯圓問題），已知漸近公式。

當 d=3 時，就是我們討論的球面。

當 $d\geq 4$ 時，情況更複雜，與二次型的表示數有關。

§ 06 與物理的深層聯繫

在量子混沌理論中，簡併度與系統的對稱性有關。

三維無限深方勢阱具有立方對稱群 O_h，其不可約表示的維數決定了簡併度的模式。

問題：

目前的研究正試圖透過這些數論結果（如生成函數的係數分佈），來理解量子混沌系統中對稱性破缺如何影響能階的簡併模式。

§ 不可約表示與簡併度的關係

在一個具有對稱性的量子系統中，系統能階的簡併度（即對應於同一個能量值的獨立狀態的數量），恰好等於支配該系統的對稱群的某個不可約表示的維度。

換句話說，如果一個系統具有某種對稱群 G，那麼該系統的哈密頓量（Hamiltonian）的本徵態會形成群 G 的表示空間。屬於同一個能量本徵值的所有本徵態，構成了群 G 的一個不可約表示；而這個不可約表示的維數，就是該能階的簡併度。

1. 從線性代數的角度看簡併

   在量子力學中，如果一個能階 E 是 n 重簡併的，代表存在 n 個線性獨立的波函數 $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n$，它們都對應於同一個能量 E。

   (1) 這 n 個函數張成了一個 n 維的向量空間 V。

(2) 對這個系統施加任何對稱操作(例如旋轉 R），新的波函數 $\hat{R}\psi_i$ 仍然是同一個能量 E 的本徵態，因此，它必定可以表示為原來那 n 個本徵態的線性組合。

這個現象在數學上被定義為：這個 n 維的向量空間 V 構成了對稱群的一個 n 維表示。如果這個表示不能再被分解成更小的不變子空間，那麼它就是一個不可約表示。

2. 核心關係式

簡併度 g(N)=不可約表式 $\Gamma^{(\mu)}$ 的維度 $d^{(\mu)}$

3. 例 氫原子與 $SO(3)$

為什麼氫原子的角動量量子數為 l 的軌域(如 s、p、d 軌域)具有 $(2l+1)$ 重簡併？

1. **哈密頓量的對稱性**：庫倫勢 $V(r)$ 是球對稱的，因此在空間旋轉下不變。這意味著旋轉操作與哈密頓量對易。
2. **不可約表示**：SO(3) 群有一系列不可約表示，通常標記為 $D^{(l)}$，其中 $l = 0, 1, 2, \ldots$。
3. **維度**：不可約表示 $D^{(l)}$ 的維度是 $2l + 1$。
4. **對應關係**：
   - 角量子數 $l = 0$（s 軌域）對應於 SO(3) 的**一維**不可約表示 → 簡併度 $g = 1$。
   - 角量子數 $l = 1$（p 軌域）對應於 SO(3) 的**三維**不可約表示 → 簡併度 $g = 3$（對應於 p_x, p_y, p_z）。
   - 角量子數 $l = 2$（d 軌域）對應於 SO(3) 的**五維**不可約表示 → 簡併度 $g = 5$。

由此可見，**簡併度** $g = 2l + 1$ 並非巧合，它正是旋轉群不可約表示的維度。

4. 偶然簡併與必然簡併

類型	必然簡併（對稱性簡併）	偶然簡併
成因	由系統的幾何或內在對稱性強制產生。	由哈密頓量的具體數學形式（如特定的數值巧合）導致，並非由對稱性保護。
與不可約表現的關係	簡併度**嚴格等於**某個不可約表現的維數。只要對稱性不被破壞，這種簡併就是穩固的。	沒有直接的群論關係。如果稍微改變哈密頓量的參數，這種簡併通常會立即消失。
例子	氫原子的 $2l+1$ 簡併（由 SO(3) 對稱性保證）。	一維無限深方勢阱中，某些不相關的能階偶然相等。

群論數學結構（不可約表現）精確地描述了(量子力學)物理系統的基本性質（簡併度）。