§ Polya 計數定理

Cycle index polynomial 對群 G，定義圈指標(cycle index0

$Z_G(x_1,x_2,\ldots):=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}x_1^{c_1(g)}x_2^{c_2(g)}\ldots$ 其中 $c_k(g)$ =該置換中長度 k 的 cycle 數量。

把 $x_k\to a^k+b^k$ 就能得到所有不同塗法數量。

Polya 計數定理：

$$I(r_1,\ldots,r_m)=Z_{\mathrm{G}}(r_1+\ldots+r_m,r_1^2+\ldots+r_m^2,\ldots,r_1^N+\ldots+r_m^N)$$

生成函數

D_4(二面體群)：{1,2,3,4}順時針 逆時針個算一次 $\#(D_4)=8$

$x^2+y^2+z^2=N$ 考慮群 $S_3\times(Z/2)^3$

J.H.Redfield The theory of group-reduced distribution。

圖論(graph theory)

例 3 個白球、3 個黑球、2 個紅球放在正方體頂點上，有幾種不同的圖(graph)？

1. 正方體旋轉的 cycle 結構

正方體旋轉共有 5 種類型：

類型	數量	cycle 結構（對 8 頂點）
恒等	1	1^8
面 90°/270°	6	4^2
面 180°	3	2^4
邊 180°	6	2^4
頂點 120°/240°	8	$1^2 3^2$

2. Cycle index

$$Z=\frac{1}{24}(x_1^8+6x_4^2+9x_2^4+8x_1^2x_3^2)$$

3. 代入顏色 $x_k\to B^k+W^k+R^k$ 得到生成函數

$$\frac{1}{24}\left[(B+W+R)^8+6(B^4+W^4+R^4)^2+9(B^2+W^2+R^2)^4+8(B+W+R)^2(B^3+W^3+R^3)^2\right]$$

抽取 $B^3W^3R^2$

4. 逐項計算 總和
5. 答案 25

例 3 個白球、3 個黑球、2 個紅球放在正八邊形頂點有幾種不同的圖案？

1. 群 C_8

2. Cycle structure

旋轉角度	cycle 結構
0°	1^8
45°	8^1
90°	4^2
135°	8^1
180°	2^4
225°	8^1
270°	4^2
315^0	8^1

3. Cycle index

$$Z_{C_8} = \frac{1}{8}(x_1^8 + 4x_8^1 + 2x_4^2 + x_2^4)$$

4. 代入顏色，得到生成函數

$$x_k \to B^k + W^k + R$$

所以生成函數為：

$$\frac{1}{8}\left[(B+W+R)^8 + 4(B^8+W^8+R^8) + 2(B^4+W^4+R^4)^2 + (B^2+W^2+R^2)^4\right]$$

抽取 $B^3W^3R^2$

5. 答案 70

§

簡併度 g(N)在群論與 Polya 計數定理的框架下，通常對應於軌道的大小。具體來說，當一個物理系統或組合結構具有某種對稱群 G 時，所有微觀狀態在群作

用下形成若干個軌道，每個軌道代表一個等價類（例如一個能級），而該軌道的大小即為該能級的簡併度。若 g(N)中的 N 表示某個參數（如粒子數、顏色數等），則 g(N)就是具有該參數值的特定軌道的階。
在統計物理或量子力學中，例如多粒子系統的能級簡併度往往源於對稱性。若系統具有某種對稱群，則每個能級對應一個不可約表示，其維數即為簡併度。此時 g(N)可能與粒子數 N 有關，可通過群表示論或 Polya 計數結合穩定子群求得。
根據群作用的軌道-穩定子定理，對於給定軌道中的一個狀態 x，其穩定子群

$Z(S_4)=\frac{1}{24}(a_1^4+6a_1^2a_2+3a_2^2+8a_1a_3+6a_4)$ 滿足：$|\text{軌道}|=\frac{|G|}{|G_x|}$

例 考慮等邊三角形的三個頂點，每點可塗黑（B）或白（W），對稱群為二面體群 D_3 ，階數 $|G|=6$ 。設 N 為黑點個數，則：

	狀態	穩定子群	簡併度 g(N)
N=0	1 個	D_3	g(0)=6/6=1
N=1	3 狀態等價		g(1)=6/2=3
N=2			g(2)=6/2=3
N=3			g(3)=1

N 中只有一個等價類，但 g(N)須額外計算。
例 $x_1+x_2+x_3+x_4=8, x_i\in Z_{>0}$

Type	排列數(degeneracy)
1,1,1,5	4
1,1,2,4	12
1,2,2,3	12
2,2,2,2	1
1,1,3,3	6

每一種拆解型態：
(1) 對應一個 stabilizer
(2) 軌道大小=簡併度
(3) Polya 計數=(在對稱群作用下的)軌道數=分拆數

1. S_4 的 cycle index polynomial

   對稱群 S_4 的 cycle index 是 $Z(S_4)=\frac{1}{24}(a_1^4+6a_1^2a_2+3a_2^2+8a_1a_3+6a_4)$ 其中 a_k 表示一個長度為 k 的 cycle。
2. 把整數和問題轉成著色生成函數

   每個位置添入正整數 1,2,3,⋯給每個字權重 t^m

因此一個位置的生成函數為 $f(t)=t+t^2+t^3+...=\frac{t}{1-t}$

3. Polya 代入法則

   將 $a_k \to f(t^k)=\frac{t^k}{1-t^k}$

4. 代入 cycle index

$$F(t)=Z(S_4)\Big|_{a_k=\frac{t^k}{1-t^k}}=\frac{1}{24}[(\frac{t}{1-t})^4+...+6(\frac{t^4}{1-t^4})]=...=\frac{t^4}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)}$$

這個 F(t)展開 $F(t)=\sum_{n\geq 4} p_4(n)t^n$ 其中 $p_4(n)$ 就是 n 分成 4 個正整數的 partition 數。

例 $F(t)=t^4+t^5+2t^6+3t^7+5t^8+...$

$p_4(8)=5$

也就是說 Polya+cycle index 給出整數拆解生成函數。因為

1. 軌道=partition
2. Cycle index=平均固定點生成函數
3. Burnside=群平均

所以分拆數=群作用軌道數。

回到 $x^2+y^2+z^2=N$

群是 S_3

Cycle index 是 $Z(S_3)=\frac{1}{6}(a_1^3+3a_1a_2+2a_3)$

代入 $a_k \to \sum_{m\geq 1} t^{km^2}$ 給出去排列後的平方和生成函數。

$$G(t)=\frac{1}{6}(f(t)^3+3f(t)f(t^2)+2f(t^3)) \quad \text{其中 } f(t)=\sum_{m\geq 1} t^{m^2}$$

$$G(t)=\sum_{n\geq 3} g(N)t^N$$