§ Modular Forms

這裡介紹了 Christopher R. Havens(1974~)，他從數學得到救贖的故事。

[專訪---寬恕與轉變] [獄中數學計畫]

Christopher Havens 目前服刑中，但遠距擔任 UCLA 的研究助理，專攻密碼學與連分數相關理論。[如果您想連繫他]

陶喆軒是 UCLA 的教授，看看他如何看待 ChatGPT 錯誤的答案，以及[AI 時代下的數學變革][AI 在數學研究中的突破]。

要理解這篇發表在[Research in Number Theoty]論文[關於由某些非同餘算術群及超幾何級數所衍生的模形式之分類]的預備知識：

1. 連分數(continued fractions)
2. 模形式(modular forms)
3. 非同餘子群(noncongruence subgroups)
4. 超幾何函數(hypergeometric functions)

我知道程之寧博士是弦論專家，她發現了模函數與有限對稱群間的深層關聯，提出了著名的「伴影月光猜想」(Umbral Moonshine)，揭示了這些數學結構間的精妙聯繫，對弦論、模形式與對稱性研究貢獻良多。

1. 何謂模形式？

$$SL(2,Z)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in Z, ad-bc=1\right\}$$

模形式就是在複數上半平面上定義的、具有極高度對稱性（模變換下不變）且性質極好的複函數。

模變換群是 SL(2,Z)，建立在 Poincare 上半平面，但是專注於複結構(全純函數) 。Modular forms 展開成傅立葉級數，其係數與數論有很密切的關係。

f 在 SL(2,Z)上，則

(1) f is holomorphic on H(全純性 表示函數在整個上半平面內無奇異點)

(2) 對每一個 $z\in H$ any matrix in SL(2,Z) $f(\frac{az+b}{cz+d})=(cz+d)^k f(z)$

(3) f is bounded as $\mathrm{Im}(z)\to\infty$

$H=\{z\in C \mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ 黎曼度量 $ds^2=\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$

Poincare 上半平面是黎曼幾何的雙曲度量，其李代數是 SL(2,R))。

2. Mobius transformation 與模形式有關嗎？

Mobius transformation 作為幾何空間的 Poincare 上半平面的變換

等距變換群：保持這個度量的所有定向等距變換(全純映射)構成的群，正好是 PSL(2,R)。其作用是 Mobius 變換 $z \to \dfrac{az+b}{cd+d}, a,b,c,d \in R, ad-bc=1$，所以它的對稱性完全由 SL(2,R)描述。

作為模形式定義域的複上半平面：

模形式 f(z)定義在同一個 H 上，但是我們強調它的複結構(全純函數)。

對稱性要求：模形式要求對某個 SL(2,Z)的離散子群Γ(稱為模群或其同餘子群)作用下 $f(\dfrac{az+b}{cz+d})=(cz+d)^k f(z), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$

這裡 SL(2,Z)是 SL(2,R)的離散子群。

我們把 Poincare 上半平面想像成一個無限大的雙曲海洋。
SL(2,R)是這個海洋的所有連續對稱(旋轉、平移、縮放)。
SL(2,Z)是其中一個離散的「晶體對稱」子群，就像在海面上铺一张無限大的等邊三角形镶嵌（雙曲三角形镶嵌）。
模形式就是這片海洋上的一種波…

3. 模形式與弦理論為何有關聯？

無論是弦理論還是模形式（Modular forms），它們的核心都在於對稱性。這種對稱性不是簡單的鏡像對稱，而是一種極其豐富、高維的「自我相似」結構。

弦理論認為，基本粒子不是「點」，而是振動著的一維弦。這些弦在時空中運動，其世界面是一個二維的曲面。

世界面：弦在時空中掃出的軌跡是一個二維的曲面（像一根運動的繩子掃出一個管面）。這個曲面的幾何形狀至關重要。

對於閉弦（一個圈），其世界面可以是一個環面（像甜甜圈表面）。而這個環面的複雜結構，可以用一個複數參數τ來描述，它位於複上半平面。

…

想像一個偉大的建築師（弦理論），他設計宇宙的藍圖時，規定所有基本模塊必須能無縫拼接，旋轉、鏡像後依然完美契合。這是一個極其苛刻的要求。

結果數學家（數論與幾何）恰好早就發現了一種「魔法瓷磚」（模形式），它們天生就具有這種無論如何變換都能自我匹配的神奇屬性。

於是，建築師別無選擇，只能使用這些魔法瓷磚來建造他的宇宙。而這些瓷磚的特殊形狀（模形式的性質），反過來決定了建築的維度（10 維）和內部結構（粒子譜）。

所以，這種關係並非偶然的玄學，而是物理自洽性這一鐵律與數學內在對稱性結構之間深刻的、必然的對話。

它告訴我們，在最基礎的層面上，宇宙的構造法則可能本質上是數學的、是對稱的。這正是弦理論最吸引人也最令人驚奇的地方。

§ Modular Forms 與黎曼猜想

作為權值 k 的模形式 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}e^{2\pi inz}$ ，其 L-函數定義為 $L(f,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ 。這個 L-函數滿足函數方程，並猜想其所有非平凡零位於 $R(s)=\frac{k}{2}$ 這直線上。

谷山-志村-韋伊定理：Modularity Theorem（模性定理）

這個猜想（現已被證明）建立了橢圓曲線與模形式之間的對應。具體來說：

每條有理數域上的橢圓曲線對應一個權值為 2 的模形式。

橢圓曲線的 L-函數等於對應模形式的 L-函數。

由於模形式的 L-函數滿足函數方程且可能滿足黎曼猜想類型的性質，這間接支持了橢圓曲線 L-函數的黎曼猜想。

§ Langlands program