

§ 孤立子(Soliton)

[[孤立子淺談](#)] 林琦焜

[[KdV equation](#)]



數學傳播季刊介紹中國第一位女數學院士 [胡和生女士 \(1928-2024\)](#)，其中提到她的主要代表作之一是「孤立子理論與應用」。

本書系統介紹了孤立子理論中的 Darboux 變換方法及其在微分幾何中的應用。

何謂孤立子(或稱孤立波)？

孤立波(soliton)是指特殊的波包(wave packet)，可以傳遞到相當長的距離而不會改變其形狀或是減弱。

行徑波(traveling wave) 解的型態如下(隨波逐流)：

$$u(x,t) = f(\xi), \xi = x - ct \dots(1)$$

§ 突然的發現需要一顆準備好的心。

1834 年 8 月的某一天，蘇格蘭造船工程師 John.Scott Russell 沿著愛丁堡運河策馬前進…

波浪在行進中保持穩定的速度與形狀，它不會散裂成水面上漂動的浮沫，也不會分流成許多更小的波，不會失去其能量，而只是向前奔流。

KdV 方程證實了 Russell 對兩個孤立子碰撞時的觀察。

§ The Korteweg de Vries equation

KdV 方程是荷蘭數學家 Joannes Korteweg 與 Gustav de Vries 於 1895 年在推導淺水波方程(shallow water wave)的過程中共同發現的一種偏微分方程。

$$\text{KdV 方程 } u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2)$$

經過變換(1)，KdV 變成一常微分方程 $-cf' + ff' + f''' = 0$ 。

...

這說明 Russell 發現的波是 KdV 方程的一個解。

§ Fermi-Pasta-Ulam problem

1954 年，物理學家費米(Fermi)在數學家 Ulam 與 Pasta 協助下在 Los Alamos 進行關於金屬內部的振動：晶格(lattice)中所有振動模式之間分享能量的方式。

...

1965 年，M.Kruskal 與 N.Zalusky 考慮 KdV 方程的初始-邊界值問題

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = \cos(\pi x), 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{且 } u, u_x, u_{xx} \text{ 在 } [0, 2] \text{ 為週期函數}$$

後面說明如何得到 KdV 方程的解。(逆散射變換理論 Inverse Scattering Transform)

§ 非線性可積系統(nonlinear integrable system)

(1) KdV 方程

(2) 非線性 *Schrödinger* 方程

(3) Sine-Gordon 方程 $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$ ，這裡提到自發性對稱破解

(4) Yang-Mills 可能是一個可積系統，目前只是猜測

§ 孤立子的例子 某種冷氣團，木星上的大紅斑(great red spot)，神經系統，場論中的相對不變量(relativistic invariants)

孤立子產生在具自發性對稱解體(spontaneous symmetry-breaking)之理論，而他們的性質與規範場空間的拓撲結構有關。

孤立子理論的應用也導致在研究真空狀態的結構等皆有重大發現。

相散波(dispersive wave)，截波(shock wave)

1. [孤立波淺談](#) 林琦焜
2. A Brief Introduction to Solitons [Rudy Lee Horne](#)
3. [消失無蹤](#)的 BEC(玻色愛因斯坦凝聚態) 自旋
4. 物理中的對偶性(上) (下)
5. 這裡有 Roger Penrose (1931-)與 Stuart Hameroff (1947-)關於意識的研究，稱為協調客觀還原(Orchestrated objective reduction) 這是在 Google 神經系統中的孤立波時無意中看到 不知道是否與孤立波有關。