

§  $\varepsilon$ -neck and canonical neighborhood

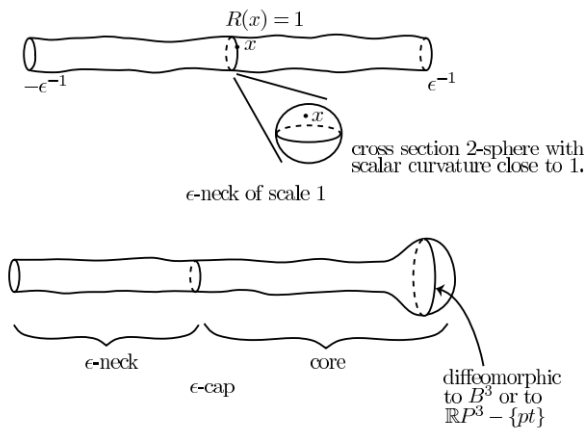


FIGURE 1. Canonical neighborhoods.

such that  $x \in \psi(S^2 \times \{0\})$  and such that the pullback of the rescaled metric  $\psi^*(R(x)g)$ , is within  $\varepsilon$  in the  $C^{1/\varepsilon}$ -topology of the product of the round metric of scalar curvature 1 on  $S^2$  with the usual metric on the interval  $(-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1})$ .

An  $\varepsilon$ -tube in  $M$  is a submanifold diffeomorphic to  $S^2 \times (0,1)$  which is a union of  $\varepsilon$ -necks and with the property that each point of the  $\varepsilon$ -tube is the center of an  $\varepsilon$ -neck in  $M$ .

In the study of Ricci flow, a canonical neighborhood (典範鄰域) is a region around a point where the geometry is close to a specific model (e.g., a round sphere, a cylinder, or a soliton).

These neighborhoods are crucial in understanding the formation of singularities in the flow.

這個概念幫助理解 Ricci 流如何在奇異點附近演化，並在幾何結構變得高度彎曲時提供分類與控制方法。

當一個三維流形在 Ricci 流下發展時，它可能會形成高曲率區域，甚至發生奇異性 (Singularities)。

Perelman 證明，在這些奇異點形成之前，流形上的每一個高曲率區域都應該具有某種「典範」的幾何結構，這些典範結構大致包括：

1. 圓柱型 ( $\kappa$ -非塌縮區域,  $\kappa$ -noncollapsed regions)：局部幾何近似於  $S^2 \times \mathbb{R}$ 。
2. 類似圓球的區域 (Roundish Regions)：在適當尺度下，它們的幾何接近於圓球。

There are two types of non-compact canonical neighborhoods :  $\varepsilon$ -necks and  $\varepsilon$ -caps .

An  $\varepsilon$ -neck in a Riemannian 3-manifold  $(M,g)$  centered at a point  $x \in M$  is a submanifold  $N \subset M$  and a diffeomorphism

$$\psi : S^2 \times (-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}) \rightarrow N$$

3. 局部接近特定的 Ricci 條件 (Evolving Regions with Controlled Ricci Curvature)：例如，局部像是一個即將形成奇異點的標準模型，如「頸部 (neck-like)」或「尖端 (cap-like)」結構。

Perelman 的典範鄰域定理：

Perelman 在研究 Ricci 流的崩潰行為時，證明了在奇異性形成之前，所有足夠高曲率的點都會落在某種典範鄰域內，這為控制奇異性提供了重要工具。

例如，對於高曲率點  $x$ ，其尺度  $r$  滿足  $R(x) \cdot r^2 \geq 1$  時，該點的鄰域在適當縮放後會變成某種已知的幾何結構（例如類似於標準的三維 Ricci 流溶解 (Singularity Model)）。

這個理論對 Hamilton-Perelman 理論以及 Poincaré 猜想的解決過程至關重要，因為它提供了對奇異性附近幾何結構的精確分類，使得手術 (Surgery) 方法可以適當地應用來繼續 Ricci 流。

典範鄰域的概念幫助建立了 Ricci 流的「手術過程 (Surgery Process)」，允許在流形變得奇異時，通過移除高曲率區域並平滑拼接來繼續流的演化。

這在 Perelman 解決三維 Poincaré 猜想的論文中發揮了關鍵作用。