

何謂規範場(gauge field)？

規範場(楊振寧) ↔ 向量叢上的聯絡(陳省身)

規範場是基於局部對稱性要求的力場，通過規範玻色子傳遞相互作用，構成現代物理描述宇宙基本力的數學語言。其核心思想是「對稱性決定相互作用」。

1. 基本概念

例 電磁場就是最簡單的規範場（對應於「U(1)規範對稱性」），光子是傳遞電磁力的規範玻色子。

在古典電磁學中，我們用電場 (E) 和磁場 (B) 來描述電磁現象。然而，直接使用 E 和 B 進行計算有時很複雜，因此我們引入了「電位」（純量勢 ϕ ）和「磁向量位」（向量勢 A ）。

物理學家發現，對於同一組電磁場 (E 和 B)，存在無限多組不同的 ϕ 和 A 組合可以描述它。我們可以對 ϕ 和 A 進行某種數學轉換（稱為**規範變換**），而最終計算出的電場和磁場卻完全相同。

$$B = \nabla \times A \quad E = -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

這意味著 ϕ 和 A 的選擇存在「冗餘」，我們可以自由地「校準」或「規範」它們。

從量子力學的角度看，帶電粒子（如電子）的波函數有一個「相位」。如果我們要求物理定律在每個時空點的相位可以獨立改變（這就是一種局域對稱性），那麼就必須引入一個場來與粒子交互作用，以維持定律不變。這個場，正是由光子所構成的電磁場。

- **規範場**：電磁四維勢 ($A^\mu = (\phi/c, A)$)
- **規範對稱性**：U(1) 局域規範對稱性
- **力的載體（規範玻色子）**：光子 (γ)

因此，電磁力可以被看作是為了維持帶電粒子波函數的「局域相位不變性」而產生的必然結果。

2. 規範對稱性

(1) 全局對稱性：物理定律在整個時空中做相同變換時保持不變（如平移、旋轉）。

(2) 局部對稱性（規範對稱性）：物理定律在時空中每一點的變換都獨立時仍保持不變。這種對稱性要求引入一個「補償場」來維持協變性，這個場就是規範場。

規範場是為了滿足「局域規範對稱性」而存在的，它的存在是基本交互作用（力）的起源。

3. Yang-Mills Theory

將規範場推廣到更複雜的非阿貝爾群（如 SU(2)、SU(3)）

例

電磁作用 → U(1) 規範群 → 規範場 A_μ (光子)

SU(3)：描述強相互作用的量子色動力學 (QCD)，規範場是「膠子場」。

SU(2) × U(1)：描述電弱統一理論（弱力和電磁力），規範場對應 W、Z 玻

色子和光子。

標準模型描述了自然界除了重力以外的三種基本力，而這三種力都是由各自的規範場所傳遞的：

基本力 (Interaction)	規範場的對稱群	傳遞力的粒子 (規範玻色子)
電磁力 (Electromagnetism)	U(1)	光子 (Photon)
弱核力 (Weak Nuclear Force)	SU(2)	W 和 Z 玻色子
強核力 (Strong Nuclear Force)	SU(3)	膠子 (Gluon)

(1) 強核力是夸克之間的作用力，由膠子這種規範玻色子傳遞，它將夸克緊緊地「黏」在一起形成質子和中子。

強作用 → SU(3) 規範群 → 規範場 G_μ^a (膠子)

(2) 弱核力與放射性衰變有關，由 W 和 Z 玻色子傳遞。

弱作用 → SU(2) 規範群 → 規範場 W_μ^a

(3) 這些理論最初預測所有規範玻色子都必須是沒有質量的（像光子一樣）。但我們知道 W 和 Z 玻色子質量很大。這個問題最終由「希格斯機制」解決，該機制解釋了在不破壞規範對稱性的前提下，W 和 Z 玻色子如何獲得質量。

4. 數學表述

(1) $A = A_\mu^a T^a dx^\mu$ ， T^a 是 Lie algebra 生成元。

這個 A 就是規範場(gauge potential)。它在局部看起來像物理中的 A_μ ，但幾何上它描述了「在時空方向如何沿著纖維平行移動」。

(2) 規範場=纖維叢上的聯絡。在整個物理時空流形 M 上考慮一個主 G-叢 (principal bundle)

$P(M, G) \rightarrow M$ 總空間 P，纖維=規範群 G

規範場就是這個主叢上的聯絡(connection)，它告訴我們如何在不同時空點比較纖維內的元素（即「平行移動」）。

(3) 規範變換=主叢上的自同構。

規範對稱性對應於叢的垂直自同構 (vertical automorphism)，即纖維方向的平滑變換：

$(x, g) \rightarrow (x, h(x)g), h(x) \in G$ 這正是物理中「在每個點做局部對稱變換」。

(4) 規範場強=曲率(curvature of connection)

聯絡的曲率形式是 $F = dA + A \wedge A$

在局部座標上： $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$

幾何上，曲率描述「平行移動繞閉曲線後纖維的扭曲」，對應於規範場的非平坦性。

(5) Wilson Loop=Holonomy

規範場的幾何意義更進一步體現在Wilson loop：

$$W(C) = \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left(i \oint_C A \right)$$

- 這是沿閉曲線 C 的平行移動 (holonomy)，度量了曲率的全局效應。
- 幾何上對應於主叢上的**平行移動群**，物理上與色禁閉 (confinement) 等現象有關。

(6) 自旋場如何與規範場耦合

這是規範理論 + 自旋幾何的核心問題，出現在量子場論 (QED、QCD)、標準模型 以及 Dirac 算子理論中。

自旋場：描述費米子 (例如電子、夸克)，用 旋量場 (spinor field) 表示，通常寫作 $\psi(x)$ ，它不是普通的標量場，而是定義在自旋結構 (Spin structure) 上，取值於旋量空間。

規範場：描述內部對稱群 G 的聯絡，對應於光子、膠子、W/Z 玻色子。

自旋場與規範場耦合 = 讓旋量場帶有規範荷，並將其導數換成協變導數。

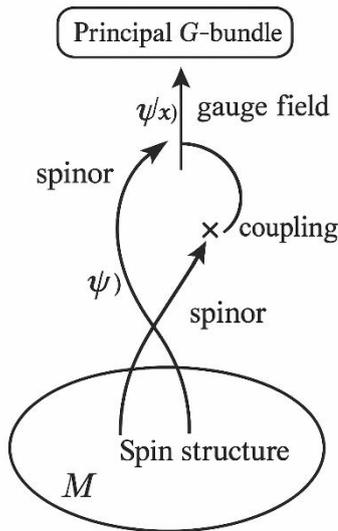
- 自旋場 = 自旋叢的截面
- 規範場 = 主叢聯絡
- 耦合 = 將 Levi-Civita 聯絡與規範聯絡相加，構造在旋量叢上的聯絡
- Dirac 算子 = 取這個聯絡的「Clifford 作用」

5. 規範場的量子化

- (1) 在量子場論中，規範場的量子激發就是規範玻色子 (如光子、膠子、W/Z 玻色子)，它們是傳遞基本相互作用的媒介粒子。
- (2) 由於規範對稱性，理論需引入鬼粒子 (Faddeev-Popov ghosts) 來處理量子化過程中的冗餘自由度。

6. 重要性

- (1) 統一相互作用：標準模型中的三種基本力 (電磁、弱、強力) 皆用規範場描述。
- (2) 數學結構：規範場的幾何本質與纖維叢 (Fiber Bundle) 密切相關，體現了物理與微分幾何的深刻聯繫。



§ 規範場與自旋場的耦合

「耦合」就是定義一個協變導數 (covariant derivative)，使得物質場 (自旋場) 能夠在規範對稱下保持局部不變性。

如果要求 $\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi$ 在局部變換下不變，則須引入規範場 A_μ

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$$

規範場進入自旋場的導數，使自旋場與規範場相互作用，這就是「規範場與自旋場的耦合」。

數學幾何詮釋：

1. 自旋場是自旋纖維叢上的剖面，規範場是結構

群 G 的主叢上的聯絡。

2. 耦合對應於兩個聯絡的合併：
 - (1) Levi-Civita 聯絡 (來自流形幾何)
 - (2) 規範聯絡 (來自 G -叢)
3. 自旋子導數

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \underbrace{\omega_\mu}_{\text{spin connection}} \psi + \underbrace{igA_\mu}_{\text{gauge connection}} \psi$$

在 QED 中，自旋場是電子 (Dirac 費米子)，規範場是電磁場 A_μ ，耦合項

$\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$ 表示電子與光子的相互作用。