

§ 均曲率 H 的定義與幾何意義

Let N be a unit normal vector field on M

The Weingarten map (shape map) $W: T_p M \rightarrow T_p M$, $W(X) = \nabla_X N(p)$ is linear and symmetric. (Weingarten map 表示來自於表面法向向量場的變化率。)

$$e_1, e_2 \in T_p M, e_1 \perp e_2$$

$$W(e_1) = c_{11}e_1 + c_{12}e_2$$

$$W(e_2) = c_{21}e_1 + c_{22}e_2$$

Then the matrix representation of W is $[W] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}[W] = \frac{Ge + Eg - 2Ff}{2(EG - F^2)}, \quad e = W(X_u) \cdot X_u = X_u \cdot N_u = -X_{uu} \cdot N, \quad f = \dots$$

$$K = \det[W] = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

The mean curvature at $p \in S$ is the average of the signed curvature over all angles θ :

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(\theta) d\theta = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) \quad \text{by Euler theorem.}$$

高斯曲率 K 可被詮釋為 Gauss map 的面積縮放率，均曲率 H 通常與「彎曲的平均量」或「彎曲所引起的體積變化傾向」有關。

均曲率的幾何意義：

1. 法向變化率(Weingarten map 的跡)

$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ 表示均曲率描述的是法向變化的平均速率，可視為法向在不同方向上的彎曲「趨勢的平均值」。

2. 曲面變形的能量指標(曲面張力)

- (1) 若 $H=0$ ，則該點為「最小曲面點」，例如肥皂膜的平衡形狀。
- (2) 均曲率的平方積分對應於 Willmore 能量，是一種度量曲面平滑程度的函數。

3. 體積變化率

若將曲面在法向方向上稍微推進（或內縮），均曲率 H 給出的是體積變化的一階導數（與推動方向有關）

$$\left. \frac{d}{dt} \text{Vol}(t) \right|_{t=0} = \int_S H dA \quad \text{這意味著，均曲率控制法向變形時的體積變化趨勢。}$$

曲率	幾何意義	物理意義	對應的 map	微分形式
高斯曲率 K	面積膨脹率	曲面本身的內在彎曲 (與外部嵌入無關)	Gauss map 的 Jacobian	$K = \det(S)$
均曲率 H	彎曲趨勢的平均	體積變化率、曲面張力	Weingarten map 的 跡除以二	$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(S)$