§ Soliton of MCF

在演化過程保持形狀不變(可能伴隨縮放、平移或旋轉)。

超曲面 $\Sigma_t \subset R^{n+1}$，滿足 H=λX$^{\perp}$+T

$\lambda \in R$：縮放因子

$X^{\perp}$：位置向量在法方向的分量。

T：常向量(對應平移)或線性向量場(對應旋轉)

分類：

(a) 自相似解

$\lambda > 0$ 例 球面 圓柱面 Angenent 環面

$\lambda < 0$ 例 雙曲拋物面

(b) 平移孤立子

$\lambda = 0$ 且 $T \neq 0$

例 Grim Reaper、Bowel soliton、Wing-like soliton

(c) 旋轉孤立子

$\lambda = 0$ 且 T 為線性向量場(如 旋轉場)

例 helicoid

§ 重要性

1. 奇點分析
2. 穩定性分析
3. 存在性與分類

§ 研究前沿：

(1) 高維與複雜結構孤立子（如非凸、非對稱、角狀收縮子）的存在性與分類。

(2) 孤立子的穩定性分析與剛性理論（例如圓柱面的L*L*-穩定性）。

(3) 孤立子的數值模擬方法發展（如 Level Set 方法）。

(4) 與其他幾何流（如Ricci 流）中孤立子的類比與交叉研究（如梯度收縮子與熵公式）。

總之，MCF 孤立子作為形狀不變的特殊解，不僅是數學上分析奇點的有力工具，更深刻揭示了幾何演化流的內在規律。對其存在性、分類及穩定性的深入研究，仍是微分幾何與幾何分析領域的活躍課題與前沿方向。