§ SU(2) 特殊么正矩陣

$$SU(2)=\{U\in C^{2\times 2}\left|U^{?}U=I,\det U=1\right\}$$

U=$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}$ 其中$\alpha,\beta\in C$ 且$\left|\alpha\right|^2+\left|\beta\right|^2=1$

例 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{i\phi} \\ -\sin\theta e^{-i\phi} & \cos\theta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

SU(2)的李代數由 Pauli 矩陣生成：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix},\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

物理中的例子

1. 自旋為 1/2 的粒子（如電子、質子、中子等）的自旋度自由用 SU(2)群來描述。SU(2)的兩維不可約表示正好對應自旋“向上”與“向下”這兩種狀態，旋轉操作由 SU(2)矩陣表示。

幾何描述：

1. SU(2) 的元素與四維空間單位球面（S^3）上的點可以一一對應，因此 SU(2)在拓撲學上與 3 維球面同構。
2. SU(2)是三維空間旋轉群 SO(3)的雙覆蓋群，即每兩個 SU(2) 矩陣對應一個 SO(3) 旋轉。