§ SO(2)到 SO(3)

李群在物理上的應用

(1) 角動量在量子力學中行為如何

(2) 基本粒子

(3) 規範場論中的對稱性與不變量

最終是希望研究 SO(3) 原因有二：

1. 對李群與李代數的抽象概念找一個具體的例子 看它如何運作。
2. 一個 Laplace 算子的固有值(eigenvalues)與氫原子的能階有關，這個 Laplace 算子是一個難解的二階微分方程，而 SO(3)對此有些幫助。其中當然還有困難，還需要研究 SO(3)的表現理論。

SU(2) locally isomorphic to SO(3) 但是可以推到更高維的 Lie algebra 所以更形重要。

§ SO(2) 平面的旋轉群：通常以 $A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$表現

$\mathrm{A}(\theta)$ 在 θ=0 展開= $I+A^{'}(0)\theta+\dfrac{A^{''}(0)}{2!}\theta^2+\dfrac{A^{'''}(0)}{3!}\theta^3+\ldots$

$\theta\approx\varepsilon$, $A(\varepsilon)\approx I+A^{'}(0)\varepsilon$ 令 $A(\varepsilon)\approx I+i\varepsilon X$,其中 $X=-iA^{'}(0)$

$$X=-iA^{'}(0)=-i\frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\Bigg|_{\theta=0}=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$$

$$e^{i\theta X}=I+i\theta X+\frac{(i\theta X)^2}{2!}+\frac{(i\theta X)^3}{3!}+\frac{(i\theta X)^4}{4!}+\ldots$$

其中 $iX=\begin{pmatrix}o & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ，$(iX)^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I$

$$=I(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-..)+iX(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\ldots)=I\cdot\cos\theta+iX\sin\theta$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cos\theta+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\sin\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

其中 $X=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$稱為 SO(2)的 Lie Algebra s0(2)的 generator，包含了 SO(2)的所有性質。

另一種寫法 $M_2(x)=\begin{pmatrix}\sqrt{1-x^2} & -x \\ x & \sqrt{1-x^2}\end{pmatrix}$ ， $X_2=-iM_2'(x)|_{x=0}=\begin{pmatrix}0 & i \\ -i & 0\end{pmatrix}$

§ SO(3)：A Lie group with three parameters $\theta_1,\theta_2,\theta_3$

The group of rotations in three dimensions

$$M_1(\theta_1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix} \quad M_2(\theta_2)=\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2\end{pmatrix}$$

$$M_3(\theta_3)=\begin{pmatrix}\cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ [Killing vector field]

對稱 ⇔　不變量 ⇔　群論

三個 generators：

$$X_1=-i\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=J_x \text{ 、 } X_2=-i\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=J_y \text{ 、 } X_3=-i\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=J_z$$

$[X_i,X_j]=iC_{ij}^k X_k$ ，其中 C_{ij}^k 稱為此 Lie algebra 的結構常數。

$[J_x,J_y]=J_z,[J_y,J_z]=J_x,[J_z,J_x]=J_y$

Let $O(3)=\left\{A\in M \,\middle|\, A^tA=I\right\}$ then

$SO(3)=\left\{A\in O(3) \,\middle|\, \det A=1\right\}$ subgroup of O(3) ，dim=3

If $G=SO(3)$ then $T_eG=so(3,R)=\{A \mid A^t+A=0\}$ 3 階反對稱矩陣

$\mathfrak{g}=\left\{A \,\middle|\, A+A^t=O\right\}$

$U(n)=\left\{A\in M_{n\times n}(C) \,\middle|\, A^tA=I\right\}$ unitary group ， $SU(n)=\left\{A\in U(n) \,\middle|\, \det A=1\right\}$

通過指數映射，也就是 Rodrigues' Formula(Ivory-Jacobi formula)，我們能把 so(3) 中的旋轉向量對應至 SO(3) 中的一個旋轉矩陣。

反之則能夠使用對數映射將 SO(3)的旋轉矩陣對應至 so(3) 中的旋轉向量

可以用 SO(3)分析多粒子系統的角動量(angular momentum)，但是 SU(2)局部與 SO(3)同構(locally iso morphic)，我們更常使用 SU(2)。
選用 SU(2)的理由是它在更高維的 Lie algebra 很重要。

https://blog.csdn.net/shao918516/article/details/116604377

[Lie Algebras for Physicists] by Robert Klauber