§ Iwasawa decomposition theorem

SL(2)=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| ad-bc=1\right\}$，試證 SU(2)與 $S^1 \times R^2$ 可微同胚(diffeomorphic)

(1) SL(2)是一個 3 維流形(in fact a Lie group)

(2) 取 a=p+q，d=p-q，b=r+s，c=r-s

則 $(p^2+s^2)-(q^2+r^2)=1$

取 $p=\cosh t\cos\alpha, s=\cosh t\sin\alpha, q=\sinh t\cos\beta, r=\sinh t\sin\beta$

其中 $\cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}, \sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$

則 $a=\cosh t\cos\alpha+\sinh t\cos\beta \quad b=\sinh t\sin\beta+\cosh t\sin\alpha$

$c=\sinh t\sin\beta-\cosh t\sin\alpha \qquad d=\cosh t\cos\alpha-\sinh t\cos\beta$

$SU(2)\xrightarrow{f}S^1\times R^2$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\to ?$

定理 1.3

Let G be any connected semisimple Lie group with Lie algebra $\bar{g}$

Then $\bar{g}=\kappa+a+n$ (direct vector space sum)

G=KAN

That is ,the mapping $(\kappa,a,n)\to\kappa an$ is a diffeomorphism of $K\times A\times N$ onto G

If $g\in G$ we can write the decomposition $g=\kappa(g)\exp H(g)n(g)$

$\kappa(g)\in K, H(g)\in a, n(g)\in N$

Lie algebra of SL(2)=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a+d=0\right\}$的

Iwasawa decomposition=$\left\{\lambda\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda,a,b\in R\right\}$所以

$K=\left\{e^{\lambda\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}\right\}$，$A=\left\{e^{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}\right\}$

$N=\left\{e^{b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$，

所以 $\underset{0\le\lambda\le 2\pi,[0]=[2\pi]}{([\lambda],a,b)} \in S^1\times R^2 \to \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2)$

就是所求的可微同胚

SL(2)是 R^2 上所有保持定向面積的線性變換群，它同構於 SU(1,1)

一般而言 一連通李群 G 與 $K\times R^n$ 可微同胚 其中 K 是 G 的極大緊緻子群

(maximal compact subgroup)

SO(2)是 SL(2)的 maximal compact subgroup

用 Gram-Schmidt 法 可以使 SL(2)與 $SO(2)\times R^2$ 可微同胚

$O(n)=\left\{A\in M \,\middle|\, A^tA=I\right\}$ 正交群(orthogonal group)

$SO(n)=\left\{A\in O(n) \,\middle|\, \det A=1\right\}$ 特殊正交群(旋轉群)

李群 E8 248 維 超旋理論的產物 1887 年提出 Jeffrey Adams 、 David Vogan