§ 證明 O(n)是一個李群

$M \xrightarrow{f} N, T_A M \xrightarrow{df} T_{f(A)} N$

1. $p \in M$ ，若$(df)_p$是蓋射(surjective) 則稱 p 是 f 的正則點(regular point)

2. $\ker(df)_p = \{B \in T_A M \,|\, (df)_A B = 0\}$

3. $q \in N$ ，若$\forall p \in f^{-1}(g)$皆為正則點 則稱 q 為 f 的正則值

定理

$M \xrightarrow{f} N$ ，$q \in N$是 f 的正則值 使得$L = f^{-1}(q) = \{p \in M \,|\, f(p) = q\} \neq \varnothing$

則 L 是 M 的子流形，且$T_p L = kef(df)_p \subset T_p M$ for all $p \in L$

以下證明 O(n)=$\{A \in M \,|\, A^t A = I\}$是一個李群

$GL(n) \xrightarrow{f} S$ (S 是對稱矩陣)， $f(A) = A^t A$

$(df)_A B = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(A + hB) - f(A)}{h} = \ldots = A^t B + B^t A$

對任意對稱矩陣 S 取$B = \dfrac{1}{2} AS$

則$A^t B + B^t A = A^t(\dfrac{1}{2} AS) + (\dfrac{1}{2} AS)^t A = \dfrac{1}{2} S + \dfrac{1}{2}(S^t A^t) A = S$

所以$(df)_A$是蓋射，由定理 取 A=I 則 $f^{-1}(I) = O(n)$是 GL(n)的子流形

所以 O(n)是一個李群。