

看郵票說數學大歷史（上）

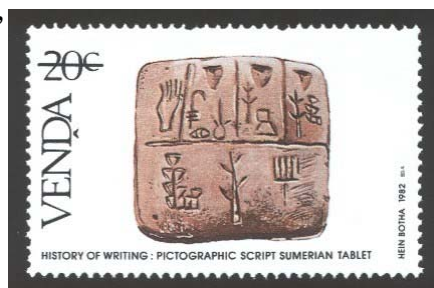
單維彰

國立中央大學數學系副教授

文化固然不等於歷史，但我們難免要在歷史中探尋文化的脈絡。現在我們將要藉著世界各地發行的郵票，敘說數學發展的歷史梗概。因為郵票是現代政府發行的，所以採用郵票作為展現歷史的媒介，使得歷史有機會跟地理發生連結，同時也因為郵票有「言」簡意賅的圖畫，所以提供了更多的閱讀樂趣。

數學的起源

五千年前的美索不達米亞文明發明了文字，而文字最初的功能之一，是為了記帳；既然書寫是為了記帳，當然就少不了數字。因此，自從有文字以來，就有數字。這張郵票呈現一塊蘇美泥板，那是目前所知最老的一批書寫遺跡。這塊泥板可能紀錄著某個單位的食物配給量 [1]，所以說它是帳本。

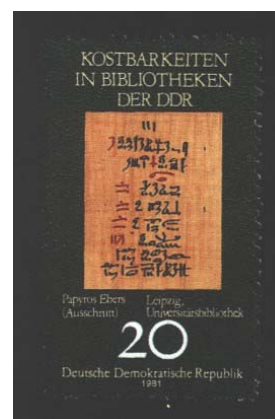


在遺留的泥板之中，有些可能是培訓書記或稅務官吏的教材，有些可能是他們寫的作業。內容主要是以蘇美人的數字系統做加、減、乘法的計算，也就是算術；但這些泥板顯示當時可能已經知道畢氏定理¹：因為有些泥板記著許多畢氏三數組 (Pythagorean Triples)，亦即滿足 $a^2 + b^2 = c^2$ 且最大公因數為 1 的三個正整數 a 、 b 和 c ，例如 (3,4,5)、(5,12,13) 等；泥板上記載著最大值超過十萬的畢氏三數。現在我們知道一套公式，可以產生無窮多組畢氏三數，但是當時的蘇美人應該還不知道這套公式 [2]。既然知道畢氏定理，蘇美人想必也懂一些幾何。

蘇美泥板的郵票是由一個名叫 Venda 的南非自治邦發行的，現在已經不存在了。它是南非還在施行種族隔離制度的時候，劃分的許多種族自治邦 (Bantustan) 之一，現在已經合併成一個國家：南非，只留下兩個獨立的國中國：賴索托和史瓦濟蘭。史瓦濟蘭是臺灣的少數邦交國之一，其國王曾出席馬英九的總統就職典禮。Venda 原本在史瓦濟蘭的北方。

¹ 所謂畢氏定理是說若有一直角三角形，若其互相垂直的兩邊長為 a 、 b ，第三邊長為 c ，則 $a^2 + b^2 = c^2$ 。三角形的邊長不必為正整數，例如 1、1、 $\sqrt{2}$ 亦可組成一個直角三角形。但畢氏三數組則專指滿足以上關係的正整數。

畢氏三數組不僅出現在美索不達米亞的泥板上，也寫在第二批古老的書寫遺跡埃及草紙 (papyrus) 上。草紙是古埃及人用一種像蘆葦的植物壓製而成的粗糙頁面，可在其上書寫。這張郵票呈現了史稱萊因數學草紙 (Rhind Mathematical Papyrus) 的一部分，內容也是畢式三數組，而用途也可能是教材。



為了記帳、發餉和稅收，我們可以理解巴比倫和埃及的部分官吏要學算術。至於幾何測量呢，按照目前的推論是因為他們都居住在大河流域，每當河水氾濫過後，得按照土地權狀所載的持分重新規劃；有效治理的政權當然要能夠正確而令人信服地重劃土地，分配給各路諸侯。據說這就是幾何學的濫觴。埃及人遺留的金字塔，顯示他們的測量能力遠高於劃分土地的需求，也顯示他們有「量天」的能力。因為直角三角形是測量技術的基礎，畢氏定理是直角三角形的根本性質，畢氏三數組則是畢氏定理的實際應用，所以它們會出現在古文明的官吏教材上。

前面兩枚郵票的蘇美泥板和埃及草紙都是大英博物館的收藏。因為這些考古證據，現在大家雖然還說「畢氏」定理，但並不認為它是希臘人畢達哥拉斯發現的，而是他在中亞或埃及學習之後，帶回希臘形成他的學派，傳遞下來的。

第二枚郵票的發行國家也不存在了：德意志民主共和國。第二次世界大戰之後，戰敗的德國被分割成東、西兩塊，前述這個「民主」共和國曾經在它的邊界築起一道圍牆，駐守的衛兵可以射殺想要翻牆出去的人；它俗稱東德。當著名的「柏林圍牆」在 1989 年倒塌之後，東、西兩德統一成一個國家：德國。

無三不成禮，再看一枚「不存在國家」的郵票吧：阿拉伯聯合共和國 (UAR) 是衝著以色列復國而由埃及和敘利亞成立的聯邦，敘利亞在三年之後就脫離了，但埃及還繼續以這個名字自稱了將近十年，直到換了另一名政治強人之後才結束，而 UAR 這個名字就在國際社會中消失了。



這枚郵票是搭配埃及的科學計算中心發行的，畫面顯示兩名古埃及的書記官吏正在清點穀物，而隱喻著需要大量的計算。可見算術和幾何都出自於社會管理的實際需要，各個古文明的情況應該都相似，亦即：數字伴隨文字而生，算術與幾何皆起源於實際的需求，而它們就是形成「數學」的兩大最古老支系。

至於數學是如何突破立即實用的需求，而發展純理論的呢？這個問題已經無從考據了。但埃及草紙記載了一些看來沒有實用價值的「難題」，引人遐想一種可能的境況。想像上面圖畫裡的埃及書記人員，成天做著大量而冗長的計算，他

們的計算能力和對於數與幾何的認識早就超過工作的需求，但是在制式的工作中並無發揮的機會，逐漸地，工作就因為不斷重複而變得枯燥了。

許多人相信，凡生而為人者，皆有創造的本能。當人們因為工作需求而熟稔了一種技術之後，經常會發展它沒有實用價值的延伸，通常成了遊戲，有時候誕生了藝術。例如中國北方挑扁擔的農人發展了竹竿舞，馴養牛馬的牧人發展了摔角，調製雞尾酒的酒保發展了拋瓶特技，足球員用頭頂持球，籃球員用一根手指支起旋轉的球，就連幾乎每個中學生，也都或多或少發展了將原子筆旋轉於指節之間的遊戲。當這些遊戲流傳於一群人之間，難免相互較量或挑戰，而良性的競爭就使得它脫離實用的需要而精益求精。廣義而言的「藝術」，也就是這樣從生活中精鍊而生。

我們想像埃及草紙上的不實用問題，就是熟稔計算的書記官之間的遊戲。解決這些問題，並非工作所需，而是這一小群人的樂趣，甚至可能是他們之間名譽地位的參照。世界各支文明的數學，可能都是沿這條脈絡發展的：伴隨著文字誕生，從實用發展成遊戲或藝術，並逐漸精煉出風格各異但內容相通的數學。所謂世界各支文明，當然包括中國。

中國

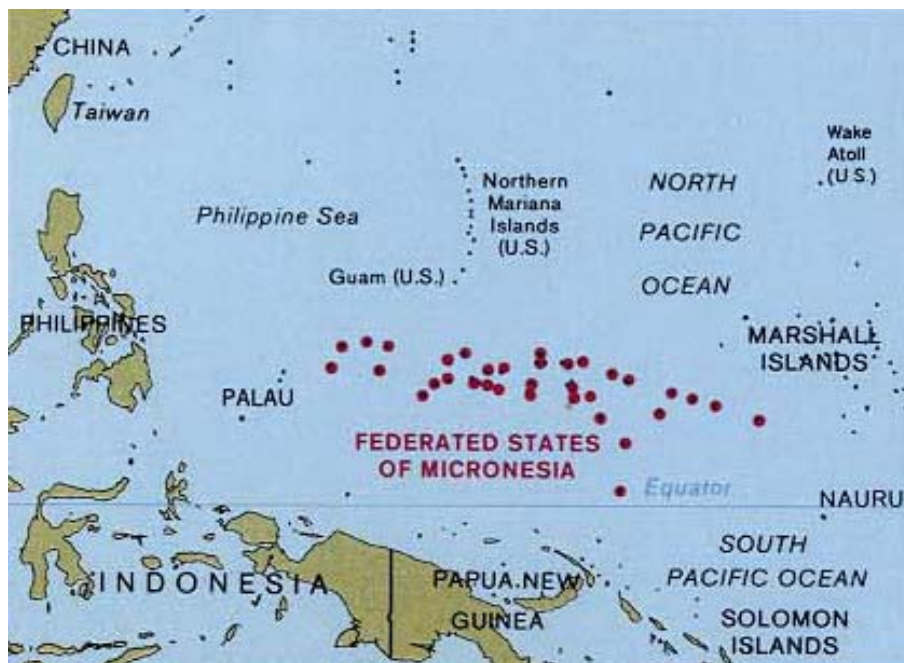
古文明都會遭遇計算圓面積和圓周長的問題，也遲早要發現這兩個問題是相關的。但是，我們不該用「後見之明」認定圓面積和圓周長的關聯在於圓周率。例如，雖然巴比倫泥板顯示他們認為圓面積是半徑平方的三又八分之一倍，並不等於古巴比倫人具備圓周率的概念，也不見得明白 3.125 是圓周率的估計值而非確值。

所謂圓周率，通常記作 π ，是指圓周長對直徑的比值。人們習慣說 $2\pi r$ 是圓周長「公式」（ $2r$ 表示直徑），這句話是有語病的，其實那是圓周率的「定義」。必須具備「圓周長是直徑的固定倍數」之概念，還得要認知圓周率是一個「不確知是多少的固定數」，才能算是發展了圓周率的概念。以上兩項認知，並不容易達到。

中國可能在秦漢兩代形成了圓周率概念，至晚到了魏晉之際，不但圓周率的概念穩固，還以逼近觀念，提出一套可以獲得越來越精確之估計值的程序，該程序如今稱為割圓術。右圖這枚郵票便是割圓術的示意頁面，山東人劉徽以割圓術證明了《九章算術》宣告的一個定理：圓面積等於以半周與半徑為邊的長方形面積（意即 $\frac{1}{2}(2\pi r) \times r$ ）。當半徑 $r=1$ ，圓面積的數值



就是圓周率，因此割圓術又是估計圓周率的算法。在郵票上可辨識七和二十二兩個數字，它說的是 $\pi \approx \frac{22}{7}$ 。因為 $3\frac{1}{7} = 3.\overline{142857}$ 所以如今我們知道劉徽的估計準到百分位。



劉徽大約生在曹丕篡漢之後，而且他經歷了司馬炎篡魏的政治事件。這枚郵票是由麥克羅尼西亞發行的，他們把「劉」的拼音誤植為LUI。麥克羅尼西亞是太平洋上六百多個一般地圖無法顯示的小島所組成的國家，領海範圍放得下六十五個臺灣，但是陸地總面積還不及彰化縣，島上的某些原住民族可能是七千年前從臺灣擴散出去的。這個現代國家是由西方人建立的，拉丁名字 Micronesia 當然也是西方人取的，意思就是微小的島。此地的觀光賣點之一是：因為海水清澈，觀光客可以從海面直視二十公尺以下的二戰沉船跟戰鬥機。

像劉徽這樣重視「證明」的數學風格，在中國是個異類，像他這種風格的人，在中國文化裡零星地曇花一現，沒有形成主流。人們常說中國的數學注重實用而輕忽理論，其實世界各地的古文明差不多都是這樣，有些文化賦予數學更多的神秘色彩，讓數學與宗教信仰連結。相對而言，中國數學比較不傾向神秘，而同樣具有濃厚神秘色彩的印度和希臘，後來的發展也殊途遠颺。

古希臘

前面已經說過畢氏定理，想必讀者都知道這位著名的古希臘哲人畢達哥拉斯 (Pythagoras)。畢氏與印度的悉達多（釋迦牟尼）和中國的孔丘（孔子）幾乎是同代人，他們幾乎在同一時期開創了三支文化傳統。雖然畢氏被稱為希臘人，但這是文化上的分類，他未必屬於希臘族裔。畢氏誕生在非常靠近波斯帝國的小島，

而他開宗立派的據點，是義大利南方臨海的一座城市。右邊這枚郵票擷取梵諦岡壁畫「雅典學院」的一隅，畫面左邊禿頂的男子，就是畫家拉斐爾想像的畢達哥拉斯。



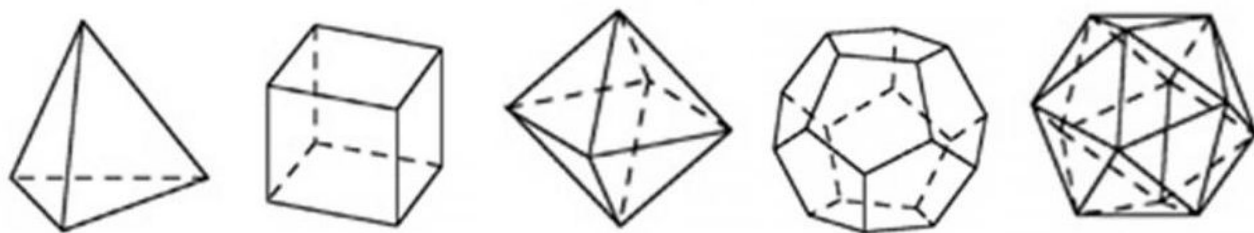
所謂畢氏「學派」也可以視為一個「教派」，畢達哥拉斯簡直是創立了一個崇拜「數」的宗教²，他把數學的神秘性推上新高點，把數學從管理人間事務的工具，提升到屬靈或屬神的境界。畢氏學派企圖用數學解釋天地間的一切，例如他們也是西方樂理的創始者，用簡單整數比解釋音頻的和諧性，據此設計音階。他們相信日月星辰在各自的天球上繞地運行，那些球的直徑互相成簡單整數比，而它們的運行發出恆定的聲響，因此當人間的樂音也符合同樣整數比時，我們就感到和諧。但是為什麼平常聽不到天空傳來的聲響呢？那是因為，他們說，打從娘胎起我們就聽慣了那恆常的天籟，所以充耳不聞了[3]。

上述郵票是獅子山共和國發行的，獅子山人和我們一樣吃白米飯和蕃薯葉。Sierra 是西班牙文的「山脈」，而 Leone 是拼錯的西班牙「母獅子」(Leona)：大陸譯作塞拉利昂。可能因為獅子山人是講英語的非洲族裔，所以不承認他們拼錯了自己國家的名字。獅子山共和國的首府是非洲臨大西洋首屈一指的深水港，現在稱為自由鎮 (Freetown)。「自由」就像「民主」一樣背負著沈痛而衝突的意義；當初非洲的原住民，從這個港口被押上船賣去美洲當奴隸；兩百年後，被英國人解放的黑奴，又被遣回這個港口，變成了新移民。

畢達哥拉斯的思想雖然沒有以宗教的形式傳遞下來，但是他就像釋迦牟尼和孔子一樣，實際上開創了一種文化。當一個人以虔敬之心對數學懷有信念，相信它可以解釋甚至預測自然界與人世間的種種關係與色相，就算不是畢氏教派的信徒，也肯定是一名慕道者了。把數學提昇到屬靈的境界，不但讓數學從實用的束縛中解脫出來，更開啟了理性辯證上的需求：事關信仰的絕對與心靈的純粹，豈能容許一絲懷疑？於是，希臘人開創了數學「證明」的形式，也賦予「證明」至高的價值。

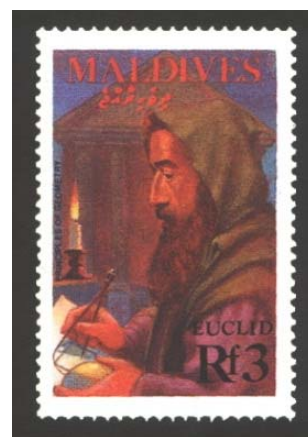
進入心靈層次的數學，擺脫了實用的羈絆而成為仁人智士的純理性創造。譬如古希臘想像宇宙有五種生成元素，就好像中國文化也有「金木水火土」的想像，但是柏拉圖 (Plato) 卻用五種正多面體對應生成元素的性質。因此，他就有必要證明世界上僅有五種正多面體。而既然柏拉圖要用多面體解釋生成元素之間的相生互化關係，就產生了研究幾何命題的必要。傳說柏拉圖的學校門口刻著：「不識幾何莫入此門」。這些幾何命題都沒有直接的實用性。

² 一則著名的傳說：畢氏學派將無理數的發現者視為叛徒並處決之，是其宗教性質的一則旁証。



從畢達哥拉斯到歐幾里得 (Euclid) 的兩百年，歷經柏拉圖和亞里斯多德 (Aristotle) 兩巨擘，累積了許多數學知識，由歐幾里得採集統整在一部稱為《Elements》的書裡。《Elements》整理數學知識的風格迥異於《九章算術》，九章的題型——公式——例題——口訣——習題風格，基本上成為中國文化裡的數學形式，而歐幾里得開創的公設——定義——定理——證明風格，則成為希臘文化的特徵之一。流傳至今，這一支數學的風格統整了全世界的數學。

右邊這枚馬爾地夫發行的郵票，是歐幾里得的想像畫。雖然梵諦岡博物館的雕像廳以及牛津大學的自然史博物館裡，陳列了大批希臘哲人的石像，但是讀者應該知道那些全是想像的。馬爾地夫是個比麥克羅尼西亞還要小的島國，這個印度洋上的蕞爾小國倒是有項「世界第一」：境內土地最高峰僅有海拔 2.4 公尺，是全世界最矮的國家。



以數學當作門檻的宗教顯然犯了曲高和寡的大忌，難以開枝散葉，但是那些希臘人因此建立了一套思想體系，並且創造了新的數學知識。後世不再關心那些思想的宗教初衷，而謂之以哲學。哲學本來就是對不能理解的事物所做的解釋，所以從宗教拿掉了戒律和應許之後，的確就是哲學了。為了純心靈的理由而累積的數學知識，並不因為宗教意義的式微而失傳，反而讓人發現了數學在會計稅捐與土地丈量以外的新用途，特別是在光學、力學以及天文學領域。數學在這些新領域的成功，使得希臘文化在工程與科學（天文地理）有長足的發展，也奠定了我們今天對數學「無用之用」的認識。我們甚至可以說，數學在其他領域的成功範例，證實畢達哥拉斯畢竟是對的：數學真的可以解釋天地間的一切，雖然不是按照他當初設想的形式。

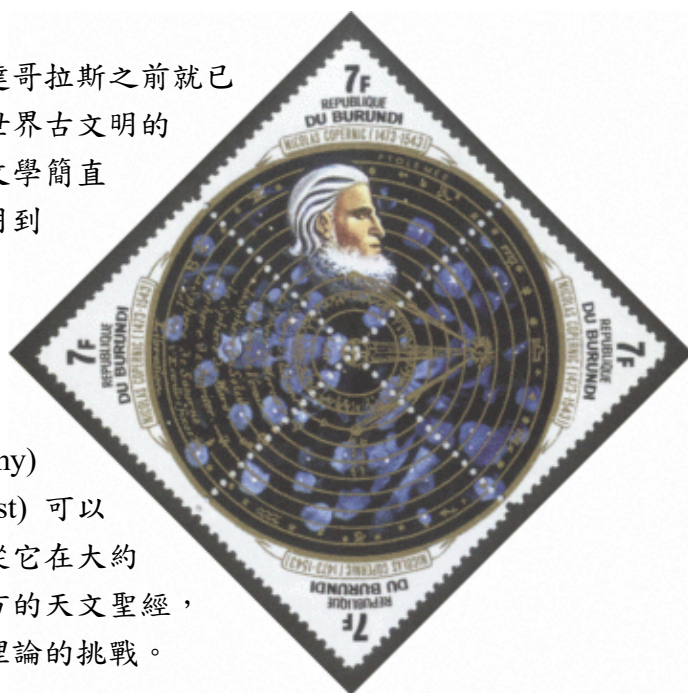
歐幾里得身後，希臘化的世界逐漸崩解，希臘式的獨立城邦一一落入羅馬帝國的版圖，但是希臘語文以及文化，在羅馬統治下繼續延燒了幾百年。大家都知道的阿基米德 (Archimedes) 就是死在羅馬攻破敘拉古 (Syracuse) 之日。阿基米德是希臘晚期的數學大師，他以開創性的新思維打破了前代數



學累積的瓶頸，使得數學獲得新生，而且將數學應用到當時所知的所有工程與科學領域。例如，所謂「古希臘三大難題」其實是三道無解的數學命題，而它們之所以無解，是因為古人以「尺規作圖」作繭自縛；阿基米德只是稍稍地違規一下，就解了三等分角和倍立方那兩題。又例如，柏拉圖的正多面體只有五種，後人都沒得玩了；於是阿基米德創造了半正規多面體，打開了另一扇大門 [4]。

阿基米德也以圓的面積公式（以圓周為底半徑為高的三角形面積）和圓周率的估計，間接解決了「三大難題」的方圓問題。阿基米德的方法也是從正六邊形出發的「割圓術」，但是他同時考慮圓的內接與外切正多邊形，所以能夠估計圓周率的下界與上界。他同樣獲得 $\pi \approx \frac{22}{7}$ 之估計，但是他知道 $3\frac{1}{7}$ 是上界，而 $3\frac{10}{71}$ 是下界 [5]。劉徽在阿基米德之後五百年，怎麼會想到幾乎一樣的割圓術呢？只能說「英雄所見略同」了。而阿基米德自認的生涯代表作，是球的體積公式：外切圓柱體的三分之二。

丈量土地所需的數學，可能在畢達哥拉斯之前就已經備足了。後來很長的一段時間，全世界古文明的主要挑戰，在於天體的測量，使得天文學簡直就是數學的同義詞。天文知識直接應用到日月蝕的預測、曆法與節氣的吻合、以及星辰占卜的推論，它們表現出「君權神授」的必要性，所以特別受到君王帝后的支持。生活在羅馬帝國埃及行政區的托勒密(Claudius Ptolemy)用希臘文寫的《天文學大成》(Almagest) 可以視為希臘數學的最後一座里程碑。自從它在大約西元 150 年完成之後，基本上成為西方的天文聖經，直到一千三百年後才開始受到哥白尼理論的挑戰。



希臘藉以「量天」的數學基礎，是在單位圓³上計算圓心角 θ 所對的弦長 $\text{crd}\theta$ ；這顯然也受到割圓術傳統的影響。托勒密算出 $\text{crd}\theta$ 的估計值，史稱托勒密弦表。這張數值表的解析度是平角的 360 分之一，也就是如今所謂的半度；而其精確度是六十進制的一秒，也就是半徑的 3600 分之一。弦長對半徑的比值 $\text{crd}\theta$ 可以導出正弦比 $\sin\theta$ ，但是兩者不該混為一談。

阿基米德郵票是西班牙郵政局發行的，España 是西班牙文的「西班牙」。西班牙語言沒有連續兩個爆破子音的發聲，英語的 SP 和 ST 發音，對應到西班牙語就會在前面補一個母音。例如英語的 special 就是西班牙語的 especial。托勒密郵票是蒲隆地 (Burundi) 發行的，它在非洲地圖上小得像綠豆一樣。二戰以後，

³ 所謂「單位圓」就是以半徑為單位長的圓，所有的弦長皆以半徑的倍數表達。

第三世界難以計數的平民百姓因為「民主自由」這個概念而喪命；蒲隆地第一次民主選舉的後果，就是連續打了十二年的內戰，二十萬人死於戰火，另外二十萬人淪為難民。

阿拉伯繼往開來

羅馬帝國擅於造橋鋪路、築城建塔，留下壯觀的工程文明，但是在特別需要想像力的文化創作方面，他們就比較少受到恭維。這可能是因為，相對於希臘是個文化的概念，羅馬則是個政治的概念；在帝國或共和國的架構之下，羅馬統治著許多種語言與宗教的人民，而希臘語文和哲學，仍然在羅馬的政治架構下發展著。所以，帝國的功勳歸羅馬，但是文化的精進還是給了希臘。例如托勒密明明就是羅馬公民，他出生於創造帝國最大疆域的圖雷真 (Trajan) 初年，一輩子活在幸福快樂的羅馬五賢君盛世期間，可是因為他用希臘文寫作，所以我們還是把他當作希臘人，把他的創作歸屬希臘。

托勒密死後不久，羅馬最後一位賢君「哲學家皇帝」奧里略 (Aurelius) 也在西元 180 年駕崩了。電影《神鬼戰士》裡被兒子殺害的老皇帝，就是奧里略；雖然電影的弑父情節是想像的，但是那位二十歲即位的年輕皇帝確實變成了暴君，羅馬從此敗壞，甚至鬧出禁衛軍把皇帝「職缺」拿出來拍賣的笑話。崩壞的帝國總會導致社會動盪，而凋敝的民生當然阻礙文化和文明的發展。一神論的天主教在動盪的社會中逐漸紮根，在第四世紀結束前，也就是羅馬帝國正式分裂成東、西兩塊之前，基督教成為羅馬帝國的國教，連羅馬人自己的多神宗教都被摒為異端，古希臘的哲學和數學（它們原先也是宗教）當然更是異端。羅馬治下的希臘思想從式微走向凋零，除了工程上實用的數學以外，其他的全都在歐洲失傳了。

東羅馬帝國雖然座落在希臘舊地，後來還將希臘語定為國語，但是基督教（東正教）與羅馬風格仍然是文化的主流，更何況他們和波斯的薩珊帝國 (Sassanid) 在歐亞邊界連年不斷的拉鋸戰，都不利於知識與文化的發展。僵持不下兩百年的羅馬與波斯之爭，在大約西元 640 年被阿拉伯人迅速畫下句點。新興的伊斯蘭教凝聚了阿拉伯部落的力量，在三十年內鯨吞了波斯帝國以及東羅馬的埃及行政區，建立起阿拉伯帝國（大食）。阿拉伯為中亞和北非維持了六百年的大致穩定，讓草原上多樣的民族和平共處，締造了超越同時期歐洲的文明。

雖然伊斯蘭教和基督教都是一神教，但是阿拉伯統治者樂於支持數學和科學知識的譯述，他們頗為尊重學者，也鼓勵詩歌文學與建築藝術的發展。因為征戰與經商的接觸，阿拉伯學者有機會揉合希臘、波斯、印度的風格與知識，發展出阿拉伯文明的數學（與天文學）。除了商務與貿易提高了對於計算的需求以外，伊斯蘭教義

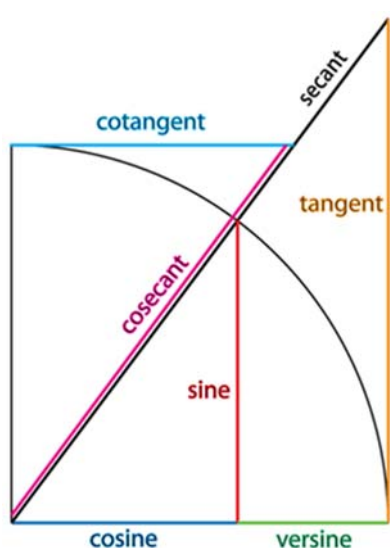


對於遺產分配的精細規定 [6]，也促進了阿拉伯從算術到代數的發展。右邊這枚（前）蘇聯 1983 年發行的郵票，紀念一位阿拉伯學者花刺子密的 1200 歲誕辰。

花刺子密是波斯人，大半輩子在巴格達的「智慧宮」(House of Wisdom) 工作，那裡是阿拉伯帝國的學術中心。他的全名是「來自花刺子模的摩西之子穆罕默德」(Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī)，而他一個人創造了兩個英文字：演算法 Algorithm 來自他的名，代數 Algebra 來自他的書。他將印度梵文數字改成阿拉伯數字，並發展了搭配這套十進位記數系統的加減乘除算法。傳進歐洲之後，這套算法就稱作阿拉伯文 Al-Khwārizmī 對應的拉丁文⁴Algorithm。至於 Algebra 則是阿拉伯文 al-jabr 的拉丁音譯，出於花刺子密討論一次與二次方程的書，書名即指出其解法的兩大基本操作：al-jabr 和 al-muqābala，前者是「恢復」的意思，意指移項運算，而後者是「平衡」的意思，意指等量公理的操作；兩者都是現在國中一年級的基本代數操作。

按照蘇聯老大哥的宣傳，花刺子模是如今烏茲別克境內的基發 (Khiva)，但實情可能更曲折些。花刺子模古國位在內陸大河阿姆河 (Amu Darya) 注入鹹海 (Aral Sea) 之前的河谷與三角洲，而花刺子密的故鄉是當年的都城，位於土庫曼的老玉龍傑赤 (Kunya-Urgench)。這座古城捱過了成吉思汗和帖木兒的摧殘，卻無法抵抗阿姆河改道的天命，終至人去城空 [7]。鹹海曾經是世界第四大湖，幾乎放得下兩個臺灣，但因為「人定勝天」的廿世紀工程師引它的源頭活水去灌溉沙漠，如今有九成的湖面乾涸成了鹽漠。

所謂方程就是**含未知數的等式** (equation with unknowns)，「方程」和「元」（未知數）都是中國數學的固有名稱。阿拉伯之前的文明都有方程的想法，通常也都包含聯立的多元一次方程以及一元二次方程，所以花刺子密的著作不算創新，而比較像歐幾里得那樣的統整。但是花刺子密確有貢獻：早期的方程都是算術的附屬品，他使得方程在阿拉伯的學術文化裡獨樹一幟，讓代數發展成算術與幾何之外的第三條數學支脈。



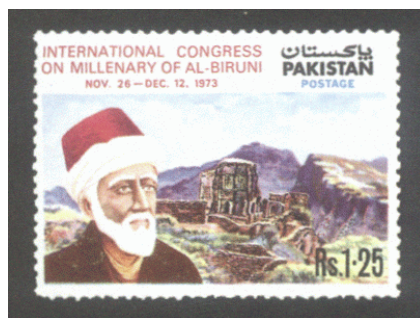
三角比是伊斯蘭文明揉合的另一支數學。希臘的天文測量傳統使用圓內的弦，也就是前面說過的 $\text{crd}\theta$ ，而印度的傳統則使用直角三角形的高對斜邊的比值，也就是今天說的正弦比 $\sin\theta$ 。阿拉伯學者綜合這兩脈傳統，把直角三角形放進了圓裡：將單位圓之圓心角 θ 當作直角三角形的一個銳角，而斜邊即半徑。希臘和印度的測量數學，在伊斯蘭文明的手裡發展了兩百年之後，不但今天使用的六個三角比 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 、 $\cot$ 、 $\sec$ 、 $\csc$ 全到齊了，還多

⁴ 拉丁文是羅馬人的文字，曾是羅馬帝國的官方文字。現在西歐各國的語言當時均為方言，後來以拉丁字母為基礎創造了各國文字。英文字母來自拉丁字母。

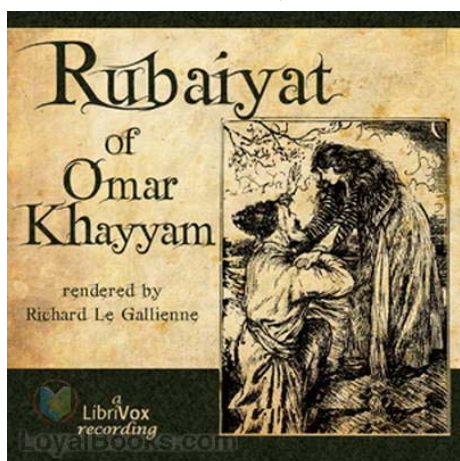
出來一些東西，例如 versin，如左圖所示。但是當年還沒有負數概念，這些三角比都是以線段長相對於半徑的倍數來理解的。

雖然托勒密已經能夠運用 $\text{crd}\theta$ 的和角與差角公式，而歐幾里得的《Elements》第二卷就以「推廣的畢氏定理」形式呈現了餘弦定理，但如今我們在中學學習的各種三角恆等式，畢竟都是阿拉伯的數學。球面上的三角測量也在伊斯蘭文明有了長足的發展：球面上的線段就是大圓上的弧，而兩弧的夾角就是那兩個大圓所在的兩平面夾角。有趣的是，阿拉伯學者先在球面上發現了正弦定理，然後才「降級」成為我們在中學學習的平面版本，而那已經是西元十三世紀的事了。

右邊這枚巴基斯坦發行於 1973 年的郵票，慶祝另一位出自花刺子模的阿拉伯學者貝魯尼的千歲誕辰 (Abū Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad Al-Bīrūnī)⁵。貝魯尼當真是行千里路寫萬卷書的學者，在七十五年的歲月中，他走過六千公里的路程，寫下一萬三千篇文章。告別阿姆河邊的家鄉之後，他先遷居東方的不花剌，再往西穿越土庫曼搬到德黑蘭，然後又東遷阿富汗的 Ghazni；埋骨於斯之前，他曾隨著蘇丹的軍隊踏訪巴基斯坦和北印度。貝魯尼的著作遍及數學、天文和地理之外，還涵蓋占星、歷史、藥典、宗教、民族誌和語言學；他學會了梵文，並成為西方的印度學創始人。



貝魯尼將三角學發展成大地測量的工具，他和一位智慧宮的同儕測量了巴格達和花刺子模之間的經度差（當時地球的「球」形已經無庸置疑），並估計歐亞大陸的「跨幅」僅占地球的五分之二。他在印度獲得地球自轉的「瘋狂」想法，苦思之後並無結論，但他至少得以宣稱：自轉的假設與當時已知的天文現象沒有矛盾。此外，像陀螺那般自轉所隱喻的穩定概念，使得貝魯尼相信在歐洲以西和亞洲以東的大洋之間，必定存在另一塊大陸。



所謂「文藝復興式」的全方位興趣與才能，彷彿是阿拉伯學者的標準配備。名傳於世的阿拉伯學者，在性情上都像貝魯尼那樣的多才多藝。恰好在貝魯尼去世的那一年，德黑蘭東方誕生了另一位阿拉伯時代的波斯鴻儒：奧瑪珈音 (Abū al-Faṭḥ Omar ibn Ibrāhīm Khayyām Neīshāhpūrī)，又譯奧瑪開儼，或者海亞姆。除了哲學家、數學家、天文學家這些頭銜之外，他更以詩人之名傳世。他的詩集

⁵ 阿拉伯男性名字經常有 ibn (伊本)，那是某人之子的意思；也常有 abu，那是某人之父的意思。常見的 al 是定冠詞，是 the 或 of the 或 from the 的意思。貝魯尼的全名是「來自城外的阿瑪之子雷罕之父穆罕默德」。Biruni 本非地名，是說他來自花刺子模都城之外。但為了向他致敬，那個昔日的城外聚落如今就叫做貝魯尼：Beruniy。

Rubaiyat 大約有一千首波斯文絕句，作於西元 1100 年前後，又譯《魯拜集》；他的詩人名望簡直就是波斯的李白。歷史小說《撒馬爾罕》以海亞姆為主角，雖然沒辦法真的展開他的學術世界，卻也描寫了這個人和那個時代 [8]。

在花刺子密探索了一次和二次方程之後，數學的興趣自然要發展到三次或更高次方程。另一方面，三角學的發展，也無可避免地連結到方程求解的問題，例如正弦的三倍角公式，可能是人類與三次方程的首次遭遇。代數在花刺子密身後 250 年達到阿拉伯文明裡的高峰，代表性的成就便是海亞姆以「數形合一」的理念求解三次方程⁶，他也發展了利用正弦表求取方程之近似解的方法。

真正的「數形合一」需要直角坐標作基礎，海亞姆雖然察覺到拋物線互相垂直的對稱軸和準線可能有用，而他也同時掌握從平面幾何轉銜到坐標幾何的關鍵技術：三角，但是他畢竟沒有挖開直角坐標系的寶藏。撼動文明的偉大創意，需要社群的激盪和時間的醞釀。阿拉伯文明養育的學術環境，確實有機會接著海亞姆的思想，走向解析幾何。但是歷史並不會按照人類的願望發展。

正當天主教和伊斯蘭的宗教戰爭陷於拉鋸膠著之際⁷，蒙古像一支燃燒的火箭，憤怒地射穿中亞和西亞而直刺波西米亞。蒙古大帝國（或者說「蒙古汗國的大聯邦」）可謂統一了整個亞洲。在征伐與殺戮的另外一面，大型帝國保障了長距離工藝流通和人員旅行的安全性（史稱 Pax Mongolica），各種文化與思想也就跟著傳播開來。阿拉伯文化裡求解高次方程的問題意識，或許藉著商旅甚至戰爭的接觸，傳入了華文世界。西元第十三世紀的百年之內，生活在女真的金朝、蒙古的元朝和漢人的南宋政權之下的愛智之士，運用中國算學的傳統思維方法，此起彼落地探索高次方程的求解算法⁸。有人認為，中國自發的數學在這個時期發展到了頂峰；它留給我們的瑰寶之一，是「綜合除法」[10]。

雖然在第十二世紀以降的海亞姆之後，阿拉伯文明仍有突破性的數學發現，但是就像遼金宋元那段時期的中國數學一樣，只有零星的閃爍而沒有集結成氣。那些學者沒有連結成社群，彼此不知道對方的思想；他們的著作「只是幸運地僅免於埋沒而已」[11]，並沒有形成知識網絡⁹，也沒有對當代和後世的數學觀念發

⁶ 海亞姆先將三次方程補一個零根，換成沒有常數項的四次方程，再以未知數代換的技術，將四次方程拆成兩個聯立的二次方程，然後把問題從方程的形式，轉換成兩條對稱軸彼此垂直的拋物線求交點問題 [9]。

⁷ 我們不該順著西方的觀點而稱這些戰爭為「十字軍東征」，就好像土耳其歷史所謂的東進支那，站在中國的立場肯定會說突厥犯西。當時的西歐文明遠遜於西亞，在阿拉伯人看來，所謂十字軍就是一群野蠻的強盜。

⁸ 值得注意的是，阿拉伯學者和接續他們的西歐學者，似乎都相信高次方程有精確解，而試圖用幾何作圖或算術（對係數做加減乘除和方根）程序得到它，直到十七世紀才開始考慮近似解。但是宋元之際的華文學者，卻似乎從一開始就不打算求得精確解（若有也是特例），而尋求一套逐步逼近的演算法 [12]。

⁹ 這絕不是說中國沒有學者的社群網絡，早從漢代以來就有了。但是那些社群的學術主題可能僅涵蓋經學、道學、文學、史學，可能還有書法，外加佛教和道教，總之不含數學。數學（算學）雖然在一千年前曾經是官學的課程，甚至曾是科舉的考科，雖然主要以培訓政府所需的技術官僚

生影響。如今看來，這些零星閃爍的數學成就富於歷史的興趣，卻沒有進入文化的脈絡。

延伸閱讀或參考文獻

1. Neil MacGregor，劉道捷、拾已安譯《看得到的世界史》大是文化，2014。
2. Eli Maor，馮速譯《勾股定理》人民郵電出版社，2009。
3. Jamie James, *The Music of the Spheres*, Copernicus, 1993.
4. George Szpiro，葉偉文譯《刻卜勒猜想》天下文化，2005。
5. 洪萬生，三國 π 裏袖乾坤——劉徽的數學貢獻〈科學發展月刊〉384期（民93年12月），68—74。
6. 蘇意雯，可蘭經裡的遺產，收錄於洪萬生等《當數學遇見文化》三民書局，2009。
7. 曹亮吉《從旅遊學數學》天下文化，2008。
8. Amin Maalouf，黃思恩、林子涵、彭廣愷譯《撒馬爾罕》河中，2011。
9. A. R. Amir-Moez, Khayyam's Solution of Cubic Equations, *Mathematical Magazine*, 35(5), 1962, 269—271。
10. 單維彰，綜合除法，www.youtube.com/watch?v=28zj2-L9Zhw，2015。
11. 蔡辰理¹⁰，中國數學史上的黃金時代及其四個偉大的數學家〈數學傳播〉第3卷第2期（民67年11月），37—43。
12. 單維彰，帶領高一學生認識秦九韶的方程解法〈中學數學教師電子報〉第127期，2017。
13. 李弘祺，《學以為己：傳統中國的教育》香港中文大學出版社，2012。

註：

原文完成於106年10月30日。

為目的，仍多少有學術的發展。宋元之際，算學的地位浮浮沉沉。到了明代以後，算學就不再出現於太學或科舉的層級了 [13]。

¹⁰ 蔡辰理是蔡仁堅先生的筆名，此篇文章經過李國偉教授的審訂與潤飾。