

§ Dirac operator

動量 $p = mv$ ，動能 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ ，位能 $W(r)$

古典力學 $E = \frac{p^2}{2m} + W$

引入微分算子 $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $p \rightarrow -i\hbar \nabla$

得到薛丁格方程式： $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + W\psi$

1928 年 Dirac 尋找一階微分 D ，滿足 $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = D\psi$ ，使得 D^2 能還原出滿足相對論

能量-動量關係 $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ 的算子形式。

正則量子化：

$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $p \rightarrow -i\hbar \nabla$ ，將可觀測的物理量替換為對應的算符。

$$E^2 = p^2 + m^2 \rightarrow -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\psi$$

若非相對論 $E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$ 是薛丁格方程式。

註：波耳的對應原理與可觀測性原則。

1926 年，波恩與維納將算符引入量子力學，爾後狄拉克運用數學變換理論統一波動力學與矩陣力學，使成一概念完整，邏輯清楚的理論體系。

Klein-Gordon equation：

$$\hbar^2 \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \psi = m^2 c^2 \psi \quad \text{把時空放在平等基礎。}$$

1928 年，Dirac 將之線性化：

$$i\hbar \left(\gamma_0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi = mc\psi, \quad \mu = 1, 2, 3$$

$$\text{即 } D^2 \propto \square^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(也就是說，Dirac 算子是 Laplace 算子的「平方根」。□ 稱為達朗貝爾算子 (d'Alembertian))

Dirac 引入 Dirac gamma 矩陣： $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$

Clifford 代數 → 定義一種特殊的乘法，使得向量的平方等於長度的平方。

$$D = i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu = i\hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial(ct)} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_0^2 = I, \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -I, \gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu \quad \text{if } \mu \neq \nu$$

$$\text{Pauli matrices } \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

波函數 ψ 是四分量的列向量，稱為 Dirac spinor，描述自旋 1/2 的粒子狀態。

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$$

黎曼流形(M,g)上

1. Clifford bundle：M 上每一點的切空間建立一個 Clifford 代數。
2. Spinor bundle：若流形具有自旋結構，就可以在其上定義一個 spinor bundle，這個 bundle 的截面即 spinor field，是 Dirac 算子作用的對象。
3. Spin connection：

4. 廣義 Dirac 算子： $D = \sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j}$ 是橢圓算子，具有良好的譜性質，在

Atiyah-Singer Index theorem 中扮演關鍵角色。

e_j 是切空間的一組標準正交基，與 connection 的 product 是 Clifford 乘法。

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$