§ Poisson bracket

Darboux 座標

$(M,\omega)$ 在點 x 的 nbd 可選 local coordinates $\{q^1,\ldots,q^n,p_1,\ldots,p_n\}$ 使

$\omega=\sum_i dp_i\wedge dq^i$ ，$\omega$ 是 symplectic 反對稱 locally integrable 通過保辛結構的座標變換可取 Darboux 座標。

Hamilton vector field $X_f=\sum_i(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i})$

Poisson bracket $\{f,g\}=\sum_i(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}-\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i})$

Definition

$f,g\in C^\infty(T^*M)$ $\{f,g\}:=X_f\cdot g$ 在 Darboux coordinates 中即為上式

Proposition

1. {f ,g}=-{g ,f}
2. 線性
3. {f,{g ,h}}+{g,{h ,f}}+{h,{f ,g}}=0
4. $X_{\{f,g\}}=[X_f,X_g]$

即$(C^\infty(T^*M),\{.,.\})$ is a Lie algebra。