§ 幾何分析的研究計畫

§ 研究標題

Spectral Stability of Weighted Dirac Operators and Geometric Constraint Theory on Non-compact Manifolds

1. 研究動機與問題定義

在廣義相對論的幾何模型中，正質量定理（Positive Mass Theorem） 的證明深受 Spin 幾何與 Dirac 算子的影響。當前幾何分析的挑戰之一，在於處理具有「非奇異」但「漸進平坦（Asymptotically Flat）」邊界條件的流形。

本計畫旨在探討：

(1) 在指標定理（Index Theorem）的框架下，當流形的度規（Metric）發生攝動時，Dirac 算子的第一特徵值如何受標量曲率（Scalar Curvature）的底層變化所影響？

(2) 是否存在特定的幾何流（如 Ricci Flow 或 Spinor Flow），能使不穩定的幾何結構收斂至一個具有穩定譜特徵的孤立子（Soliton）？

2. 核心研究目標

(1) 譜間隙估計 (Spectral Gap Estimation)：推導出非緊緻 Spin 流形上 Dirac 算子第一特徵值的下界估計，並改進經典的 Lichnerowicz 估計公式。

(2) 變分法應用：構造一個關於 Dirac 行列式的幾何泛函，並研究其在度規空間中的關鍵點（Critical Points）性質。

(3) 奇點分析：分析當流形發生拓撲改變（如 Surgery）時，狄拉克譜的「跳變」現象與 L2-餘調類的聯繫。

3. 理論框架與方法論

本研究將綜合使用以下高等數學工具：

(1) Clifford 代數與 Spin 束：利用 $Cl(V, q)$ 的表示理論構建 Spinor 場。

(2) Bochner 恆等式：這是聯繫分析與幾何的橋樑。我們將利用以下形式進行推導： $D^2\psi = \nabla^*\nabla\psi + \frac{1}{4}R\psi$

(3) 橢圓型算子的分析理論：在 Sobolev 空間 $W^{k,p}$ 中處理非線性偏微分方程的解的存在性與正則性。

4. Innovations

（1） 跨學科結合：將傳統的譜幾何工具引入到廣義相對論的穩定性證明中。

（2） 動態演化：不同於靜態的幾何研究，本計畫強調「度規流（Metric Flow）」對算子譜的動態影響。

建議

1. 把幾何分析的書讀好

2. 工具掌握：博士級研究的核心在於「估計（Estimates）」。您需要熟練掌握

Maximum Principle 和 Sobolev Embedding Theorems 在流形上的變體。

3. 計算推導 例如完整推導一次 Atiyah-Singer 指標定理在簡單流形（如 S^n 或 T^n ）上的特殊情形。

§

Yang-Mills flow 的 Singularity 與 $\varepsilon - regularity$

一.奇異性分析語言

(1)Uhlenbeck compactness

(2) $\varepsilon - regularity$

(3)Monotonicity formula

二.進入 Yang-Mills flow

(1)Yang-Mills flow 基本結構

(2)Short-time existence

(3)Singularity formation

三.進入準研究狀態

(1)Yang-Mills flow convergence

(2)Hermitian Yang-Mills (非 Kalher)

(3)Ricci flow $\varepsilon - regularity$

(4)Perelman entropy

四.小研究題目

(1)Yang-Mills $\varepsilon - regularity$ 的改進版本

(2)Bubbling rate 分析

(3)Yang-Mills flow on noncompact manifold