

§ Rauch comparison theorem [GA6.5]

$$M \in \{S^n, R^n, H^n\}$$

Let $c(t)$ be a geodesic with $\left\| \dot{c} \right\| = 1, v \in T_{c(0)}M$ with $\|v\| = 1$ 。

The Jacobi field $J(t)$ along c with $J(0) = 0, \dot{J}(0) = v$ is given by $(\sin t)v, tv, (\sinh t)v$, resp。

| | Jacobi field 解 | Jacobi field |
|-------|---------------------|--------------------|
| S^n | $J(t) = (\sin t)v$ | $\ddot{J} + J = 0$ |
| R^n | $J(t) = tv$ | $\ddot{J}(t) = 0$ |
| H^n | $J(t) = (\sinh t)v$ | $\ddot{J} - J = 0$ |

所有測地線都從 $c(0)$ 出發，分離速度 v ，曲率影響測地線的聚集(或展開)的速度。

定理 6.5.1 Jacobi field comparison theorem

透過常曲率空間的解 f_μ 來控制流形上的 Jacobi 場 J 。

Suppose $K \leq \mu$ ， $c(t)$ be a geodesic with $\left\| \dot{c} \right\| = 1$ 。

($K \leq \mu$ 的含義：如果你的流形曲率很低(例如負曲率)，測地線會比在常曲率 μ 的空間(如球面或歐氏空間)中散開得更快。

Assume either $\mu \geq 0$ or $J^{\text{tan}} \equiv 0$ (Jacobi 場的切分量)。

定義一個比較函數 $f_\mu := |J(0)|c_\mu + |J'(0)|s_\mu$ ，是常曲率方程 $\ddot{f} + \mu f = 0$ 的解，且滿

足初始條件 $f(0) = |J(0)|, \dot{f}(0) = |J'(0)|$ 。

若 $f_\mu(t) > 0$ for $0 < t < \tau$ 則

(1) 導數關係： $\left\langle J, \dot{J} \right\rangle f_\mu \geq \left\langle J, J \right\rangle \dot{f}_\mu$ on $[0, \tau]$

本質上在比較對數導數 $\frac{\left\langle J, \dot{J} \right\rangle}{\left\langle J, J \right\rangle} \geq \frac{\dot{f}_\mu}{f_\mu}$ 。

這意味著真實 Jacobi 場的相對增長率大於標準解的相對增長率。

(2) 單調性： $1 \leq \frac{|J(t_1)|}{f_\mu(t_1)} \leq \frac{|J(t_2)|}{f_\mu(t_2)}$ if $0 < t_1 \leq t_2 < \tau$ ($\frac{|J(t)|}{f_\mu(t)}$ 隨時間遞減)

(3) 長度下界： $|J(t)| \geq f_\mu(t)$ for $0 \leq t \leq \tau$

當曲率 K 較小 ($K \leq \mu$) 時，空間變得更「開闊」，因此真實的雅可比場長度 $|J(t)|$ 會大於等於在曲率 μ 空間中的對應長度 $f_\mu(t)$ 。

直觀理解：在負曲率（如馬鞍面）上，兩條平行線會迅速遠離；
在正曲率（如球面）上，它們會趨於匯聚。

註：

Jacobi 方程是 $\ddot{J} + R(J, \dot{c})\dot{c} = 0$ 在常曲率空間中，若空間的截曲率恆為常數 μ ，
則 $R(J, \dot{c})\dot{c} = \mu(\dot{c}, \dot{c})J - \mu \langle J, \dot{c} \rangle \dot{c}$ ，考慮 $J \perp \dot{c}$ 且 $\|\dot{c}\| = 1$ 則 Jacobi 方程變成

$$\ddot{J} + \mu J = 0。$$

所以 $\ddot{f} + \mu f = 0$ 是常曲率空間，法向 Jacobi 場長度所滿足的純量方程。

$\mu > 0$ $\ddot{f} = -\mu f$ 是彈簧力，總是把偏離的測地線往回拉。

$\mu < 0$ $\ddot{f} = |\mu| f$ 是排斥力

定理假設真實流形 $K \leq \mu$ ，構造一個虛擬的常曲率空間解 f_μ ，滿足 $\ddot{f}_\mu + \mu f_\mu = 0$

因為真實曲率 K 比 μ 小，真實的發散力會比 $\ddot{f} + \mu f = 0$ 所描述的力量更強(或收縮力更弱) $\Rightarrow |J(t)| \geq f_\mu(t)$

$c_\mu(t), s_\mu(t)$ 是 Jacobi 方程 $\ddot{f} + \mu f = 0$ 的(標準基底解)解 (μ is the constant sectional curvature.)。

根據曲率 μ 的正負，它們有三種具體形式：

| 曲率情況 | $c_\mu(t)$ | $s_\mu(t)$ | 幾何背景 |
|-----------------|-----------------------|---------------------------------------------|---------------------|
| $\mu > 0$ (正曲率) | $\cos(\sqrt{\mu}t)$ | $\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(\sqrt{\mu}t)$ | 如球面 S^n |
| $\mu = 0$ (零曲率) | 1 | t | 歐氏空間 \mathbb{R}^n |
| $\mu < 0$ | $\cosh(\sqrt{-\mu}t)$ | $\frac{1}{\sqrt{-\mu}} \sinh(\sqrt{-\mu}t)$ | H^n |

c 代表 cosine-like 滿足初始條件 $c_\mu(0) = 1, \dot{c}_\mu(0) = 0$

s 代表 sine-like 滿足初始條件 $s_\mu(0) = 0, \dot{s}_\mu(0) = 1$

$f_\mu(t) = |J(0)|c_\mu(t) + |J'(0)|s_\mu(t)$ 這實際上是在做初值問題的線性組合：

$|J(0)|$ 決定了初始的「寬度」，由 c_μ 負責承接。

$|J'(0)|$ 決定了初始的「發散速度」，由 s_μ 負責承接。

定理 6.5.2

假設 $\lambda \leq K \leq \mu$ 且 $\lambda \leq 0$ 或 $J^{\text{tan}} \equiv 0$ ； $\|\dot{c}\| \equiv 1$ ，而且 $J(0), \dot{J}(0)$ 線性相依。

假設 $s_{\frac{1}{2}(\lambda+\mu)} > 0$ on $(0, \tau)$ 則 for $0 \leq t \leq \tau$ $|J(t)| \leq |J(0)|c_\lambda(t) + |J'(0)|s_\lambda(t)$

公式中的 $c_\lambda(t), s_\lambda(t)$ 是常曲率 λ 的「模型空間」的標準解：

當 $\lambda > 0$ 時， $c_\lambda(t) = \cos(\sqrt{\lambda}t), s_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}t)$

當 $\lambda = 0$ 時， $c_\lambda(t) = 1, s_\lambda(t) = t$

當 $\lambda < 0$ 時， $c_\lambda(t) = \cosh(\sqrt{-\lambda}t), s_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \sinh(\sqrt{-\lambda}t)$

正曲率傾向於讓測地線匯聚，而負曲率傾向於讓測地線發散。公式中的不等式給出了這種發散程度的精確上限。

定理 6.5.3

Theorem 6.5.3 Suppose $\|\dot{c}\| \equiv 1, |K| \leq \Lambda$. Let $J(0)$ and $\dot{J}(0)$ be linearly dependent. Let P_t denote parallel transport along c from $c(0)$ to $c(t)$.

Then

$$|J(t) - P_t(J(0) + t\dot{J}(0))| \leq |J(0)|(\cosh(\sqrt{\Lambda}t) - 1) + |J'(0)| \left(\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sinh(\sqrt{\Lambda}t) - t \right). \quad (6.5.24)$$

當曲率有界時，Jacobi 場偏離其「歐幾里得行為」（即線性增長）的程度。

$|J(t) - P_t(J(0) + t\dot{J}(0))|$ 代表流形曲率所造成的「擾動」。

右側項則由雙曲函數 \cosh 與 \sinh 組成，這顯示當曲率存在時，測地線之間的變分（由 Jacobi 場描述）可能會隨著時間 t 呈指數級發散或收縮，而非僅是線性增長

- **初值依賴性**：偏差的大小取決於初始位置的長度 $|J(0)|$ 以及初始變化率 $|J'(0)|$ 。 e^{+1}
- **曲率影響**：誤差項中的 $\sqrt{\Lambda}$ 表明，曲率界限 Λ 越大，Jacobi 場偏離線性增長的潛在速率就越快。 e^{+1}

簡而言之，這個定理為我們在不平坦空間中估算測地線的穩定性（或發散速度）提供了一個精確的定量工具。

The Rauch comparison theorems are infinitesimal comparison results for the geometry of a Riemannian manifold in terms of the geometry of spaces of constant curvature。

A global comparison result is Toponogov theorem:

習作 常曲率 (constant sectional curvature) 流形的特徵公式。

若 K 是常截曲率，則 $R(X, Y)Z = K(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y)$

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \quad \langle R(X, Y)Y, X \rangle = K(|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2)$$

假設 $\tilde{R}(X, Y)Z := K(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y)$ 則

$$\tilde{R}(X, Y)Y = K(\langle Y, Y \rangle X - \langle X, Y \rangle Y)$$

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Y, X \rangle = K(|Y|^2 |X|^2 - \langle X, Y \rangle^2) \quad \tilde{R} \text{ 與 } R \text{ 的截曲率一致}$$

黎曼曲率張量滿足(1)反對稱 $R(X, Y) = -R(Y, X)$

(2)metric 相容性 $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$

(3)第一 Bianchi 恆等式 $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$

\tilde{R} 也滿足這三個性質 因此 $\tilde{R} = R$

若空間的截曲率恆為常數 μ ，則 $R(J, \dot{c})\dot{c} = \mu(\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle J - \langle J, \dot{c} \rangle \dot{c})$