§ Minimal submanifolds

定理 5.4.1

A submanifold M of the Riemannian manifold N is a critical point of the volume function，i.e. $\frac{d}{dt}Vol(\phi_t(M))\big|_{t=0}=0$ for all local variations of M if and only the mean curvature $H_v$ of M vanishes for all normal directions v。

(then M is called minimal)

推論 1.

The one-dimensional minimal submanifold of N are the geodesics in N。

推論 2.

An immersed submanifold of $R^n$ is minimal iff all coordinate functions are harmonic。

In particular，there are no nontrivial compact minimal submanifolds of Euclidean space。

定義

對於曲面(二維流形)給定一個共形結構等價於給定一個複結構，使其成為一黎曼面(Riemann surface)。

Riemann surface：

簡單來說，黎曼曲面是一個一維的複流形。雖然從實數的角度看它是一個二維曲面，但在其上我們可以像在平面上一樣進行複數微積分。

例 Riemann sphere

- **構造：** 想像將複平面 $\mathbb{C}$ 彎曲，並在頂部加入一個「無窮遠點」$\{\infty\}$，將其封閉成一個球體。
- **幾何意義：** 這就是複射影直線 $\mathbb{CP}^1$。透過**立體投影（Stereographic Projection）**，複平面上的每一個點都能對應到球面上，而無窮遠處則收縮為球的北極。
- **直觀理解：** 它讓我們能以統一的視角處理複數，不再需要擔心 $1/0$ 這種奇點。

統一了不同的領域

1. 分析：它是多值函數的自然定義域。
2. 幾何：它可以根據虧格進行分類。
3. 代數：每一條代數曲線(如 $y^2=x^3+ax+b$)在複數域上都對應一個黎曼曲面。

這使得我們可以用幾何的形狀（如洞的個數）來預測分析問題的性質（如函數的個數），這正是 Atiyah-Singer 指標定理等現代數學核心思想的起源。