§ The curvature of submanifolds [GA5.2]

M 是 N 的子流形，v 是一固定的法向量場。

$S_v : T_xM \to T_xM$ is selfadjoint w.r.t metric <.,.>，假設$|v| = 1$(則 v 是 unit normal field)，S_v的 m 個特徵值稱為主曲率(principal curvatures)。

S_v稱為形狀算子(shape operator 或 Weigarten 算子)，$S_v(X) = -(\nabla_X v)^T$

則 M 的 v 方向的均曲率$H_v := \frac{1}{m} trS_v$。

M 的 v 方向的高斯曲率(Gauss-Kronecker)$K_v := \det S_v$ （$K_v = \det(l_v(e_i, e_i))$）

例 $S^2 \subset R^3$ 假設 M 是一個半徑為 R 的球面，嵌入在歐幾里得空間R^3中。
v：指向球外的單位法向量
對於球面上任何一點的切向量 X，形狀算子(shape operator $S=I^{-1} \cdot II$) 的作用結果為：$K = \det(S) = \kappa_1\kappa_2, H = \frac{1}{2} tr(S) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$

$S_v(X) = \frac{1}{R} X$，在切空間選取一組正規正交基，則S_v可以表示為$S_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$

$H_v = \frac{1}{2}(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}) = \frac{1}{R}$

Shape operator 又稱為 Weingarten map。

設 S 為空間中的一個可定向曲面，p 為曲面上的一點，n 為在該點的單位法向量。對於曲面在 p 點的切向量 v，形狀算子S_p 定義為：$S_p(v) = -\nabla_v n$

兩切向量$u, v \in T_pS$，則第二基本式$II_p(u,v) = \langle S_p u, v \rangle$

絕妙定理的古典陳述：
即便高斯曲率在定義時依賴於曲面在三維歐幾里得空間中的嵌入（embedding）方式（涉及曲面的法向量與形狀算子），但高斯曲率本身完全由曲面上的度量性質所決定(是一個「內蘊（intrinsic）」量)。

§ 定理 5.2.1 Gauss equations (theorema egregium 的高維推廣)
子流形 M 與其環境空間(amblient manifold)之間的關係。

m=dimM，n=dimN，k=m-n， $x \in M, v_1, \ldots, v_k$ are orthonormal basis for $(T_x M)^{\perp}$

l_α :法方向 v_α 的第二基本形式(衡量 M 在 N 中如何彎曲)

S_α :shape operator。 (1) $S_v(x) = -(\nabla_x v)^T$ (2) $S_x = I^{-1} \cdot II$ (矩陣形式)

(M,g)是(N,h)的子流形， $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ 則

1. 向量形式

$$\mathrm{R}^{\mathrm{M}}(\mathrm{X,Y})\mathrm{Z}-(\mathrm{R}^{N}(X,Y)Z)^{T} = \sum_{\alpha=1}^{k} (l_\alpha(Y,Z) S_\alpha X - l_\alpha(X,Z) S_\alpha Y)$$

子流形測量到的曲率與環境空間本身曲率的差異(值)來自於子流形在環境空間中的第二基本形式的組合。這是絕妙定理的高為推廣。

2. 內積/標量形式

$$\left\langle R^M(X,Y)Z, W \right\rangle - \left\langle R^N(X,Y)Z, W \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^{k} (l_\alpha(Y,Z) l_\alpha(X,W) - l_\alpha(X,Z) l_\alpha(Y,W))$$

子流形的曲率=環境空間的曲率+嵌入造成的彎曲修正項。

Proof Since everything is tensorial, we extend $X, Y, Z, W, \nu_1, \ldots, \nu_k$ to vector fields in TM and $TM^{\perp}$, resp., with the ν_α always being orthonormal.

$$\nabla_Y^N Z = (\nabla_Y^N Z)^{\top} + (\nabla_Y^N Z)^{\perp} = \nabla_Y^M Z + \langle \nu_\alpha, \nabla_Y^N Z \rangle \nu_\alpha,$$

since the ν_α form an orthonormal basis of $TM^{\perp}$.

Hence

$$\nabla_X^N \nabla_Y^N Z = \nabla_X^N \nabla_Y^M Z + X(\langle \nu_\alpha, \nabla_Y^N Z \rangle) \nu_\alpha + \langle \nu_\alpha, \nabla_Y^N Z \rangle \nabla_X^N \nu_\alpha,$$

i.e.

$$\begin{aligned} (\nabla_X^N \nabla_Y^N Z)^{\top} &= \nabla_X^M \nabla_Y^M Z + \langle \nu_\alpha, \nabla_Y^N Z \rangle (\nabla_X^N \nu_\alpha)^{\top} \\ &= \nabla_X^M \nabla_Y^M Z - \ell_\alpha(Y, Z) S_\alpha(X) \quad \text{by (5.1.5).} \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Analogously

$$(\nabla_Y^N \nabla_X^N Z)^{\top} = \nabla_Y^M \nabla_X^M Z - \ell_\alpha(X, Z) S_\alpha(Y). \tag{5.2.4}$$

Moreover,

$$(\nabla_{[X,Y]}^N Z)^{\top} = \nabla_{[X,Y]}^M Z \quad \text{by Theorem 4.7.1.} \tag{5.2.5}$$

(5.2.1) follows from (5.2.3)–(5.2.5), and (5.2.2) follows from (5.2.1). □

後記：
在二維曲面中，高斯曲率是唯一決定曲面彎曲性質的內蘊量。但進入高維後，幾何結構變得遠為複雜。使得推廣變得「困難」且「深刻」:

1. 從高斯曲率到黎曼曲率
   在 n 維黎曼流形中，彎曲性質需要用黎曼曲率張量（Riemann curvature tensor）R^i_{jkl} 來描述。

   絕妙定理的高維版本，實際上是由黎曼完成的。
   其核心結論是：黎曼曲率張量是「度量張量（Metric tensor）」的二階微分函數，因此它也是一個內蘊量。
   這意味著，如果你知道流形上的所有測距方法（度量），你就完全確定了黎曼曲率張量，而不需要知道流形是如何嵌入更高維空間的。
2. 高維幾何的自由度與約束
   但在高維中，我們面臨兩個極端的挑戰：
   (1) 嵌入（Embedding）難題：根據納什嵌入定理（Nash embedding theorem），任何黎曼流形都可以等距嵌入到某個足夠高維的歐幾里得空間中。
   這意味著外在與內蘊的區別在數學上是統一的，但這使得尋找類似二維那種簡單幾何直觀變得極度困難。
   (2) 幾何的豐富性：高維空間存在許多不同種類的曲率（例如截面曲率、Ricci 曲率、數量曲率）。
   在二維，它們都坍縮為高斯曲率；但在高維，它們分別反映了流形在不同維度方向上的彎曲特性，不再能用一個單一的內蘊量概括。
3. 計算公式從代數到微分形式
   由於手算張量幾乎是不可能的，數學家發展了移動標架法（Method of moving frames）與外微分形式（Differential forms）（由嘉當 Élie Cartan 開創）來處理高維推廣。
   這與高斯當初處理二維曲面的手法已大相逕庭，抽象程度大幅提高。

定義
若 M 中的 geodesics 都是 N 中的 geodesic，則稱 M 為 totally geodesic in N。

定理 5.2.2 M is totally geodesic in N $\Leftrightarrow$ M 的所有第二基本式皆為零。

定義 $p \circ v : M \to S^{n-1}$ is called the Gauss map of M。

The Jacobian of $dv(x): T_xM \to T_xM$ then becomes the Jacobian of the Gauss map。