§ the second fundamental form

§ 01 induced connection

§ 02 second fundamental form

§ 03 distance function r(x)

$M \xrightarrow{\varphi} N$ ，φ is an immersion，N 是環境流形，M 是其子流形。

$h \to g$

定理 5.1.1

N 上的 Levi-Civita 聯絡∇^N透過垂直投影(orthogonal projection)誘導到子流形 M ∇^M ：

$\nabla_X^M Y = (\nabla_X^N Y)^T$ for all $X, Y \in \Gamma(TM)$

1. 切叢的分解

   $T_p N = T_p M \oplus T_p M^\perp$，對任意向量$V \in T_p N$ 唯一分解為 $V = V^T + V^\perp$

2. 高斯公式

   高斯公式說明環境流形 N 的黎曼聯絡∇^N對於切向量場$X, Y \in \Gamma(TM)$的作用，可以分解為兩部分：$\nabla_X^N Y = \nabla_X^M Y + B(X, Y)$

   其中$B(X,Y) = (\nabla_X^N Y)^\perp = \nabla_X^N Y - \nabla_X^M Y$即第二基本形式定義，描述子流形在環境流形(空間)的彎曲程度。

   後面定義第二基本張量$S : T_x M \times T_x M^\perp \to T_x M$ ，$S(X, v) = (\nabla_X^N v)^T$

3. 解釋 對於$\nabla^M = \nabla_X^M Y = (\nabla_X^N Y)^T$我們需要驗證：

1. 無撓性(torsion free) $\nabla_X^M Y - \nabla_Y^M X = [X,Y]$
2. 與度量相容

   對於 M 上的向量場 X,Y,Z $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X^M Y, Z) + g(Y, \nabla_X^M Z)$

N 上的 Levi-Civita 聯絡誘導到 M 的方式可以概括為：先在大空間做協變微分，然後將結果正交投影回子流形的切空間。

例

流形 N：R^3，$g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ 其 Levi-Civita connection 就是普通的方向導數

子流形 M： S^2 在球面上一點 p=(x,y,z)，向外的單位法向量正好就是該點的座標向量： $n_p=$(x,y,z)=p(單位向量)

X,Y 是 S^2 上的兩切向量場，這意味著每個點 p，都有 $X\cdot p=0, Y\cdot p=0$

在大空間計算 $\nabla_X Y$ ，根據高斯公式，在球面的聯絡 ∇^{S^2} 是 $\nabla_X Y$ 的切向部分。

在 R^3 中，對任何向量 V，投影到 S^2 切空間的公式為：

$proj_{TS^2}(V)=V-\langle V,n\rangle n$ 因此球面的聯絡公式為： $\nabla_X^{S^2}Y=\nabla_X Y-\langle\nabla_X Y,p\rangle p$

例

取 p(1,0,0)(赤道上)，X=(0,1,0) (在 p 切於球面， $X=\frac{\partial}{\partial y}$)，Y=(-y,x,0) (是繞 z 軸旋轉的向量場)

在 R^3 中計算 $\nabla_X Y=\frac{\partial Y}{\partial y}=(-1,0,0)$

投影 $\langle\nabla_X Y,p\rangle=-1, \nabla_X^{S^2}Y=(-1,0,0)-(-1)(1,0,0)=(0,0,0)$

這說明了繞 z 軸轉動的向量場沿著赤道前進時，其內在的（切向的）變化率為 0。這正是因為赤道是大圓測地線。

切向分量 $\nabla_X^{S^2}Y$ ：定義了子流形內部的平移感。

法向分量 $h(X,Y)=\langle\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y},n\rangle n$ ：測量了子流形在 N 中彎曲的程度。

對於球面，這個分量總是與半徑方向有關，反映了球面向心彎曲的幾何特性。

若我們選取距離球作為子流形，其彎曲程度（第二基本形式）直接對應於該法向量場在切方向上的變化率。

假設 v(x)是 $x_0\in M\subset N$ 的 neighborhood 的向量場，$\langle v(x),X\rangle=0$ for all

$X\in T_xM$ ，即 $v(x)\in T_xM^{\perp}$ 。

Lemma 5.1.1 $(\nabla_X^N v)^T(x)$ only depends on v(x)。

定義 5.1.1 The second fundamental tensor of M at the point x is the map

$S: T_xM \times T_xM^{\perp} \to T_xM$ ，where $S(X,v) = (\nabla_X^N v)^T$

Lemma 5.1.2

For $X, Y \in T_xM$ ，$l_v(X,Y) := \langle S(X,v), Y \rangle$ is symmertic in X and Y。

$l_v(X,Y) := \langle S(X,v), Y \rangle$ 定義為 M 的第二基本式(w.r.t N)。

§ Lemma 5.1.3

$r(x) = d(x,p)$ 流形上任一點到固定中心點的黎曼距離。

則 r(x) is smooth for 0<r(x)<i(p) and $gradr(x) = -\dfrac{\exp_x^{-1} p}{\left\| \exp_x^{-1} p \right\|} = -\dfrac{1}{r(x)} \exp_x^{-1} p$

In particular $\left\| gradr(x) \right\| = 1$ and $\langle gradr(x), Y \rangle = 0$ for any $Y \in T_xM$

Thus，gradr(x) is a unit normal field for the distance sphere (距離球) S(p,r(x))。

定義距離函數的目的：

1. 建構與描述特定類型的超曲面（如距離球）及其幾何性質，並進一步探討法向量場與彎曲程度 。

   透過距離函數的梯度，可以自然地誘導出法向量場。gradr(x)在距離球上是一個單位法向量場，這對於理解子流形如何鑲嵌在環境流形中非常重要，因為它提供了一個明確的方向，將切空間與法空間區分開來 。

2. 定義距離函數後，我們可以探討該函數的梯度與切向量場之間的幾何關係（如$\langle gradr(x), Y \rangle = 0$ 對於所有$Y \in T_x^M$成立）。這與「第二基本形式」的概念相呼應。

3. 提供微分幾何計算的工具：$gradr(x) = -\dfrac{1}{r(x)} \exp_x^{-1} p$ 。

這類計算公式在黎曼幾何中非常實用，特別是在處理測地線、指數映射以及研究流形的曲率時，距離函數提供了分析局部幾何結構的一種有效方式。

附錄：

1. 由 regular value theorem， $M=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^3+xyz+z^2=1\}$ 是 R^3 的 submanifold。