§

Let M be a submanifold (m-dim) of the n-dim Riemannian manifold N。

The metric of N induce a metric on M，the Levi-Civita connection of M from that of N：

N 上的 Levi-Civita 聯絡透過正交投影(orthogonal projection)誘導到子流形 M：

$\nabla_X^M Y = (\nabla_X^N Y)^T$ for all $X, Y \in \Gamma(TM)$

1. 切叢的分解

   $T_p N = T_p M \oplus T_p M^{\perp}$ 對任意向量 $V \in T_p N$ 唯一分解為 $V = V^T + V^{\perp}$

2. 高斯公式

   我們將 N 上的 Levi-Civita 聯絡分解為 $\nabla_X^N Y = (\nabla_X^N Y)^T + (\nabla_X^N Y)^{\perp}$

   誘導聯絡定義為 $\nabla^M = \nabla_X^M Y = (\nabla_X^N Y)^T$

   第二基本形式定義為 $h(X,Y) = (\nabla_X^N Y)^{\perp}$，這裡 h(X,Y)是個張量)

$$\nabla_X^N Y = \underbrace{\mathrm{proj}_{TM}(\nabla_X^N Y)}_{\text{切部：稱為 } \nabla_X^M Y} + \underbrace{\mathrm{proj}_{TM^{\perp}}(\nabla_X^N Y)}_{\text{法部：稱為 } h(X,Y)}$$

- $\nabla_X^M Y$ **（切部）：** 這就是 $M$ 內部的 Levi-Civita 聯絡。
- $h(X,Y)$ **（法部）：** 這就是第二基本形式。它衡量的是：從大空間的角度看，當你試圖在 $M$ 上平移 $Y$ 時，$Y$ 往「外面（法向）」彎了多少。

   後面定義第二基本張量 $S : T_x M \times T_x M^{\perp} \to T_x M$

   $S(X, v) = (\nabla_X^N v)^T$

3. 解釋

對於 $\nabla^M = \nabla_X^M Y = (\nabla_X^N Y)^T$ 我們需要驗證

1. 無撓性(torsion free)

   $\nabla_X^M Y - \nabla_Y^M X = [X,Y]$

2. 與度量相容

   對於 M 上的向量場 X,Y,Z $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X^M Y, Z) + g(Y, \nabla_X^M Z)$

N 上的 Levi-Civita 聯絡誘導到 M 的方式可以概括為：先在大空間做協變微分，
然後將結果正交投影回子流形的切空間。

關於第二基本形式如何描述子流形的彎曲程度（例如 Gauss-Codazzi 方程）
例
大流形 N： R$^3$ $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ 其 Levi-Civita connection 就是普通的方向導數
子流形 M： $S^2$

在球面上一點 p=(a,y,z)，向外的單位法向量正好就是該點的座標向量： $n_p$ =

(x,y,z)=p

X,Y 是 $S^2$ 上的兩切向量場，這意味著每個點 p，都有 $X \cdot p = 0, Y \cdot p = 0$

在大空間計算 $\nabla_X Y$ ，根據高斯公式，在球面的聯絡 $\nabla^{S^2}$ 是 $\nabla_X Y$ 切向部分

在 $R^3$ 中，對任何向量 V，投影到 $S^2$ 切空間的公式為：

$proj_{TS^2}(V) = V - \langle V, n \rangle n$ 因此球面的聯絡公式為： $\nabla_X^{S^2} Y = \nabla_X Y - \langle \nabla_X Y, p \rangle p$

例
取 p(1,0,0)(赤道上)， X=(0,1,0) (在 p 切於球面)，Y=(-y,x,0) (是繞 z 軸旋轉的向量場)

在 $R^3$ 中計算 $\nabla_X Y = \dfrac{\partial Y}{\partial y} = (-1, 0, 0)$

投影 $\langle \nabla_X Y, p \rangle = -1, \nabla_X^{S^2} Y = (-1, 0, 0) - (-1)(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$

這說明了在赤道上，繞極轉動的向量場沿著赤道前進時，其內在的（切向的）變化率為 0。這正是因為赤道是大圓（測地線）。

切向分量 $\nabla_X^{S^2} Y$ ：定義了子流形內部的「平移」感。

法向分量 $h(X, Y) = \langle \nabla_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}, n \rangle n$ ：測量了子流形在 N 中彎曲的程度。對於球面，

這個分量總是與半徑方向有關，反映了球面向心彎曲的幾何特性。