§ Induced connection and second fundamental form

$M \xrightarrow{\varphi} N$ ，φ is an immersion，N 是環境流形，M 是其子流形

$h \to g$

Let M be a submanifold (m-dim) of the n-dim Riemannian manifold N。
The metric of N induce a metric on M，the Levi-Civita connection of M from that of N：
N 上的 Levi-Civita 聯絡透過垂直投影(orthogonal projection)誘導到子流形 M：

$\nabla_X^M Y = (\nabla_X^N Y)^T$ for all $X, Y \in \Gamma(TM)$

1. 切叢的分解

   $T_pN = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$，對任意向量 $V \in T_pN$ 唯一分解為 $V = V^T + V^{\perp}$

2. 高斯公式

   我們將 N 上的 Levi-Civita 聯絡分解為 $\nabla_X^N Y = (\nabla_X^N Y)^T + (\nabla_X^N Y)^{\perp}$

   第二基本形式定義為 $B(X,Y) = (\nabla_X^N Y)^{\perp}$，這裡 B(X,Y)是個張量。

後面定義第二基本張量 $S : T_xM \times T_xM^{\perp} \to T_xM$

$S(X,v) = (\nabla_X^N v)^T$

For $X, Y \in T_xM$ $l_v(X,Y) := \langle S(X,v), Y \rangle$ 定義為 M 的第二基本式(w.r.t N)

3. 解釋 對於 $\nabla^M = \nabla_X^M Y = (\nabla_X^N Y)^T$ 我們需要驗證

1. 無撓性(torsion free)

   $\nabla_X^M Y - \nabla_Y^M X = [X,Y]$

2. 與度量相容

   對於 M 上的向量場 X,Y,Z $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X^M Y, Z) + g(Y, \nabla_X^M Z)$

N 上的 Levi-Civita 聯絡誘導到 M 的方式可以概括為：先在大空間做協變微分，然後將結果正交投影回子流形的切空間。

關於第二基本形式如何描述子流形的彎曲程度（例如 Gauss-Codazzi 方程）
例

大流形 N：$\mathbb{R}^3$ $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ 其 Levi-Civita connection 就是普通的方向導數

子流形 M： S^2 在球面上一點 p=(a,y,z)，向外的單位法向量正好就是該點的座標向量： $n_p=$ (x,y,z)=p

X,Y 是 S^2 上的兩切向量場，這意味著每個點 p，都有 $X\cdot p=0, Y\cdot p=0$

在大空間計算 $\nabla_X Y$ ，根據高斯公式，在球面的聯絡 ∇^{S^2} 是 $\nabla_X Y$ 切向部分

在 R^3 中，對任何向量 V，投影到 S^2 切空間的公式為：

$proj_{TS^2}(V)=V-\langle V,n\rangle n$ 因此球面的聯絡公式為： $\nabla_X^{S^2}Y=\nabla_X Y-\langle \nabla_X Y, p\rangle p$

例

取 p(1,0,0)(赤道上)， X=(0,1,0) (在 p 切於球面)，Y=(-y,x,0) (是繞 z 軸旋轉的向量場)

在 R^3 中計算 $\nabla_X Y=\dfrac{\partial Y}{\partial y}=(-1,0,0)$

投影 $\langle \nabla_X Y, p\rangle=-1, \nabla_X^{S^2}Y=(-1,0,0)-(-1)(1,0,0)=(0,0,0)$

這說明了在赤道上，繞極轉動的向量場沿著赤道前進時，其內在的（切向的）變化率為 0。這正是因為赤道是大圓（測地線）。

切向分量 $\nabla_X^{S^2}Y$ ：定義了子流形內部的平移感。

法向分量 $h(X,Y)=\langle \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y},n\rangle n$ ：測量了子流形在 N 中彎曲的程度。

對於球面，這個分量總是與半徑方向有關，反映了球面向心彎曲的幾何特性。

附錄

1. M= $\{(x,y,z)\in R^3 \,|\, x^3+xyz+z^2=1\}$ 是 R^3 的 submanifold(根據 regular value theorem)