

§ Eigenvalue (Gradient) Estimate

Let M be a compact Riemannian manifold of nonnegative Ricci curvature with diameter

D . Then the first eigenvalue of M satisfies $\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{2D^2}$

為了方便證明，我們將 u 正規化，使得 $\max u=1$ 且 $\min u=-k$ ， $0 < k \leq 1$

1. 利用 Bochner 公式進行梯度運算

$$\text{Bochner 公式: } \frac{1}{2} \Delta |\nabla u|^2 = |\text{Hess}(u)|^2 + \langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u)$$

$$\text{Hess}(u) = \nabla^2 u$$

$$\text{已知 } \text{Ric} \geq 0 \text{ 且 } \Delta u = -\lambda_1 u, \text{ 所以 } \frac{1}{2} \Delta |\nabla u|^2 \geq |\text{Hess}u|^2 - \lambda_1 |\nabla u|^2$$

$$\text{由 Cauchy-Schwarz 不等式 } |\text{Hess}u|^2 \geq \frac{(\Delta u)^2}{n} \text{ (n 是 dimension)}$$

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla u|^2 \geq \frac{(\Delta u)^2}{n} - \lambda_1 |\nabla u|^2$$

2. 建立輔助函數與梯度估計

$$\text{考慮輔助函數 } F = \frac{|\nabla u|^2}{1-u^2}$$

註：這是在假設 u 的範圍對稱於 0 的簡化情況。更嚴謹的做法是考慮

$$F = \frac{|\nabla u|^2}{(1+\varepsilon-u)(u+k+\varepsilon)} \text{ 並令 } \varepsilon \rightarrow 0 \text{)}。$$

透過最大值原理，在 F 達到極大值的點，利用對數微分與 $\nabla u = -\lambda_1 u$ 的性質，可以推導出一個關於梯度的不等式。

對於 $\text{Ric} \geq 0$ 的流形，Li-Yau 的經典估計指出： $|\nabla u|^2 \leq C\lambda_1(1-u^2)$

3. 直徑與路徑積分

令 $P, Q \in M$ 分別為 u 取得最大值與最小值的點。考慮連接 P 與 Q 的最短測地線 $\gamma(s)$ ，其長度 $L \leq D$ 。

沿著測地線積分：

$$\int_P^Q \frac{|\nabla u|}{(1-u^2)^{1/2}} ds \leq \int_0^L \sqrt{C\lambda_1} ds \leq \sqrt{C\lambda_1} D$$

左側的積分與特徵函數的範圍有關。若利用變數代換 $u = \cos \theta$ ，積分結果會產生 π 的項。

4. 得到特徵值下界

整理上述積分不等式，將直徑 D 與 π 聯繫起來：

$$\pi \leq \sqrt{C\lambda_1} D \Rightarrow \lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{CD^2}$$

在 PDF 所載的特定估計中，對應的常數 C 導出了： $\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{2D^2}$

§ 4.5 The Bochner Method

Lemma 4.5.1

$\{e_i\}$ 是 M 的 local orthonormal frame field， $\{\eta^i\}$ 是其 dual coframe field。

For a 1-form we have

$$-\Delta \langle \eta, \eta \rangle = -2 \langle \Delta \eta, \eta \rangle + 2 \langle \nabla_{e_i} \eta, \nabla_{e_i} \eta \rangle - 2 \langle \eta, \eta^i \wedge \iota(e_j) R(e_i, e_j) \eta \rangle$$

Theorem 4.5.1

$\{e_i\}$ 是 M 的 local orthonormal frame field， $\{\eta^i\}$ 是其 dual coframe field。

For a 1-form we have $-\Delta \langle \eta, \eta \rangle = -2 \langle \Delta \eta, \eta \rangle + 2 |\nabla \eta|^2 + 2 Ric(\eta, \eta)$

where $|\nabla \eta|^2 := \langle \nabla_{e_i} \eta, \nabla_{e_i} \eta \rangle$ and writing $\eta = f_i \eta^i$,

$$Ric(\eta, \eta) := Ric(f_i e_i, f_j e_j) = f_i f_j Ric(e_i, e_j)$$

§ 在 Lean4 中

在 Lean 4 與 mathlib4 的生態系統中，將這類幾何估計形式化是目前微分幾何研究的前沿課題。

1. 作為幾何分析庫

目前 Lean 的數學庫 mathlib4 在分析與線性代數方面非常強大，但在黎曼幾何的高階結果上仍處於建構階段。形式化這項估計需要建立一連串的底層組件：

(1) Bochner 公式的形式化

(2) 譜理論

(3) 最大值原理 在形式化證明中，這類分析論證通常比純代數證明更難處理，因為涉及大量的 $\varepsilon - \delta$ 控制。

(4)

2. 幾何 AI 研究的基準測試

(1) 自動證明生成

像 GeometryZero 這類模型，其目標是自動生成幾何證明。

將經典的梯度估計（如 Li-Yau 估計）形式化，可以提供高品質、機器可讀的訓練數據（Ground Truth）。

(2) 驗證 AI 生成的解

當 AI 提出新的孤立子解或幾何結構時，Lean 4 可以用來驗證這些結構是否滿足譜間隙 (Spectral Gap) 的理論下界。

3. 跨領域理論的橋樑

在 Lean 4 中形式化此類定理，有助於連接不同領域：

- (1) 比較幾何 (Comparison Geometry)：這項估計是基於 $Ric \geq 0$ 的假設，形式化它可以進一步推廣到 Myers 定理或 Bishop-Gromov 體積比較定理。
- (2) 計算譜幾何：透過 Lean 4 驗證的算法，可以更精確地計算特定流形（如複射影空間或特定對稱空間）的特徵值範圍，而不僅僅是理論上的下界。

§ 如何在 Lean 4 中定義一個具有非負里奇曲率的黎曼流形結構？

```

Lean □

import Mathlib.Geometry.Manifold.RiemannianMetric
import Mathlib.Analysis.InnerProductSpace.Basic

-- 定義一個 n 維的光滑流形 M
variables {n : ℕ} {M : Type*} [TopologicalSpace M] [ChartedSpace (EuclideanSpace ℝ (Fin n)) M]

-- 賦予 M 黎曼度量結構
variable [RiemannianMetric M]

/--
定義非負里奇曲率條件：
對於流形上每一點 p，其里奇張量作為對稱雙線性形式在切空間上是非負定的。
-/
def HasNonnegativeRicci (M : Type*) [TopologicalSpace M] [ChartedSpace (EuclideanSpace ℝ (Fin n)) M]
  (p : M) (v : TangentSpace (ℝ, EuclideanSpace ℝ (Fin n)) p),
  ricci_curv p v v ≥ 0

/--
緊緻性與直徑約束：
對應於您提供的文獻中「直徑為 D 的緊緻流形」之設定 [cite: 2, 3]。
-/
def IsCompactWithDiameter (M : Type*) [MetricSpace M] [CompactSpace M] (D : ℝ) :
  Metric.diameter (Set.univ : Set M) = D

```

在形式化證明中還要在 Lean4 中定義

1. Laplace-Beltrami 算子
2. 特徵值方程
3. Bochner 公式

§ Bochner-Weitzenbock formula 也稱為 Bochner method

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla u|^2 = |\text{Hess}(u)|^2 + \langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u)$$

Hess(u) : $\nabla^2 u$

Δ : Laplace-Beltrami 算子

展現關於 Ricci 曲率的意義 : [參考 Geometry of manifolds with densities]

PDE 資訊+ 曲率條件 \rightarrow 幾何或拓撲結論。

(1) Liouville 型定理(丘)

若黎曼流形滿足 $\text{Ric} \geq 0$, u 是 harmonic function 且 $u > 0$ 則 $u = \text{constant}$ 。

(2) 郭逸帆([Yifan Guo](#))

The Measure preserving isometry Groups of Metric Measure Spaces

如果 M 具有負的 Ricci 曲率, 那麼它的等距變換群 $\text{Iso}(M)$ 必定是有限群。

(3) 正 Ricci 曲率與第一 Betti 數

第一 Betti 數 $b^1(M)$ 是一個重要的拓撲不變量, 大致描述了流形上獨立的一維「環路」的個數。Hodge 理論告訴我們, $b^1(M)$ 等於流形上調和 1-形式的空間維數。

Harmonic 1-form 消失定理:

若 ω 為 harmonic 1-form : $\Delta \omega = 0$ 則 Bochner 公式寫成

$$\frac{1}{2} \Delta |\omega|^2 = |\Delta \omega|^2 + \text{Ric}(\omega, \omega) \quad \text{若 } \text{Ric} > 0 \text{ 則 } \omega = 0 \quad \text{第一 Betti number } b_1(M) = 0$$

如果流形的 Ricci 曲率 $\text{Ric} \geq 0$, 那麼等式右邊兩項都是非負的。這意味著 $\Delta |\omega|^2 \geq 0$, 即 $|\omega|^2$ 是一個下調和函數。

在一個沒有邊界的緊緻流形上, 一個下調和函數必須是常數。因此, $|\omega|^2$ 是常數。

將常數 $|\omega|^2$ 代入原式, 我們得到 $0 = |\nabla \omega|^2 + \text{Ric}(\omega^\#, \omega^\#)$ 。

(4) Bonnet-Myers 定理的工具

(5) 在 harmonic map 理論中 Bochner 公式變成 $\Delta |du|^2 = |\nabla du|^2 + \text{curvature terms}$

(6) 特徵值估計 Lichnerowicz estimate

(7) Harnack 不等式(丘)

(8) 熱方程估計(R.Hamilton)

進階應用:

Bochner + Kato inequality \rightarrow minimal surface 估計

Bochner + Sobolev inequality \rightarrow curvature decay

Bochner technique 在 Seiberg-Witten 理論中的應用

§ Theorem 4.5.1

$\{e_i\}$ 是 M 的 local orthonormal frame field, $\{\eta^i\}$ 是其 dual coframe field。

For a 1-form we have $-\Delta\langle\eta,\eta\rangle = -2\langle\Delta\eta,\eta\rangle + 2|\nabla\eta|^2 + 2Ric(\eta,\eta) \cdots(2)$

where $|\nabla\eta|^2 := \langle\nabla_{e_i}\eta, \nabla_{e_i}\eta\rangle$ and writing $\eta = f_i\eta^i$,

$$Ric(\eta,\eta) := Ric(f_i e_i, f_j e_j) = f_i f_j Ric(e_i, e_j)$$

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = |Hess(u)|^2 + \langle\nabla u, \nabla\Delta u\rangle + Ric(\nabla u, \nabla u) \cdots(1)$$

(2) 是 Jurgen Jost 書上 differential form 形式的 Bochner 公式, (1) 是函數的形式。用 $\eta = f_i\eta^i$ 聯繫起來。

其中 $Hess(u) = \nabla du$ 在局部坐標系中 $Hess(u)_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x^k}$

與 1-form 的聯繫, 當一個 1-form η 恰好是某函數的微分時, 即 $\eta = \nabla u$ 則 $\nabla\eta = \nabla(du) = Hess(u)$

此外, Weitzenbock 公式: $\Delta(du) = d(\Delta u) + Ric(\nabla u, \cdot)$

將 $\eta = du$ 代入(2)式 $\langle du, du\rangle = |\nabla u|^2$, $Hess(u) = \nabla du$

這裡有正負號的問題, 是因為採取 Hodge Laplacian 算子的關係。

§ 附錄

證明 $|Hess(u)|^2 \geq \frac{(\Delta u)^2}{n}$

$Hess(u)$ 在 normal coordinates system 下可以看作是一個 $n \times n$ 矩陣 $A = (a_{ij})$, 其中

$a_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ 。Laplacian Δu 是它的 trace, 即 $\Delta u = \sum_i a_{ii}$, $|Hess(u)|^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$

Cauchy-Schwarz 不等式 $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$

取 $x_i = a_{ii}$, $y_i = 1$ 則 $\left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}^2\right) \times n$, $\left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)^2 = (\Delta u)^2$

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \geq \frac{(\Delta u)^2}{n} \quad \text{因為} \quad \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 \geq 0$$

$$|\text{Hess}(u)|^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \geq \frac{(\Delta u)^2}{n}$$