§ The Bochner Method [GA4.5]

Lemma 4.5.1

$\{e_i\}$是 M 的 local orthonormal frame field，$\{\eta^i\}$是其 dual coframe field。

For a 1-form we have

$$-\Delta\langle\eta,\eta\rangle=-2\langle\Delta\eta,\eta\rangle+2\langle\nabla_{e_i}\eta,\nabla_{e_i}\eta\rangle-2\langle\eta,\eta^i\wedge\iota(e_j)R(e_i,e_j)\eta\rangle$$

§ The Bochner formula

(M,g)是黎曼流形，α是 1-form 則$\Delta\alpha=\nabla^*\nabla\alpha+\mathrm{R}(\alpha)$

1. Bochner 公式又稱 Bochner-Weitzenbock 恆等式)

   1-form：$\Delta\omega=\nabla^*\nabla\omega+\mathrm{R}ic(\omega^\#,.)$

2. $\Delta=d\delta+\delta d$是 Hodge Laplacian
3. $\nabla^*\nabla$ ：Bochner Laplacian(或 Rough Laplacian)，∇^*是∇的 adjoint
4. 兩 Laplace 算子的差異由流形的曲率決定。

一般形式：Weitzenbock 恆等式

對於和 metric 相容的 vector boundle E，ϕ是 E 上的截面則$\Delta\phi=\nabla^*\nabla\phi+R(\phi)$

1. 函數 $\Delta f=\nabla^*\nabla f$
2. p-form：(M,g) compact，$\Delta=-\mathrm{tr}\nabla^2-\sum_{i,j}\eta^i\wedge\iota_{e_j}R(e_i,e_j)$

   其中$\{e_j\}$是 an orthonormal local frame，$\{\eta^i\}$是 dual frame。

3. spinor：$D^2\psi=\nabla^*\nabla\psi+\frac{1}{4}R\psi$

§ Bochner principle 是指利用上述公式，透過對流形進行積分與分析，來證明某些幾何對象（如調和形式、Killing 場或旋量）必須「消失」（為零）或為「平行」（Parallel）的技術。

維度	Bochner Formula (公式)	Bochner Principle (原理)
性質	局部的代數恆等式。	全域的解析/幾何推理。
內容	描述算子、導數與曲率的定量關係。	描述曲率的正負如何限制拓撲性質（如 Betti 數）。
結論範例	$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{R}{4}$。	「若 $R > 0$，則不存在非零的調和旋量」。

§ Theorem 4.5.1

$\{e_i\}$是 M 的 local orthonormal frame field，$\{\eta^i\}$是其 dual coframe field。

For a 1-form we have $-\Delta\langle\eta,\eta\rangle = -2\langle\Delta\eta,\eta\rangle + 2|\nabla\eta|^2 + 2Ric(\eta,\eta)\cdots(2)$

where $|\nabla\eta|^2 := \langle\nabla_{e_i}\eta,\nabla_{e_i}\eta\rangle$ and writing $\eta = f_i\eta^i$,

$Ric(\eta,\eta) := Ric(f_ie_i, f_je_j) = f_i f_j Ric(e_i,e_j)$

$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = |\mathrm{Hess}(u)|^2 + \langle\nabla u,\nabla\Delta u\rangle + Ric(\nabla u,\nabla u)\cdots(1)$

(2)是 Jurgen Jost 書上 differential form 形式的 Bochner 公式，(1)是函數的形式。用$\eta = f_i\eta^i$聯繫起來。

其中 Hess(u)=∇du 在局部坐標系中 $Hess(u)_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k\frac{\partial u}{\partial x^k}$

與 1-form 的聯繫，當一個 1-formη恰好是某函數的微分時，即$\eta = \nabla u$ 則 $\nabla\eta = \nabla(du) = Hess(u)$

此外，Weitzenbock 公式： $\Delta(du) = d(\Delta u) + Ric(\nabla u,.)$

將$\eta = du$ 代入(2)式 $\langle du,du\rangle = |\nabla u|^2$ ， $Hess(u) = \nabla du$

這裡有正負號的問題，是因為採取 Hodge Laplacian 算子的關係。

§ 附錄

證明$|Hess(u)|^2 \geq \frac{(\Delta u)^2}{n}$

Hess(u)在 normal coordinates system 下可以看作是一個$n\times n$矩陣$A=(a_{ij})$，其中

$a_{ij}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$。Laplacian Δu 是它的 trace，即$\Delta u=\sum_i a_{ii}$，$\left|Hess(u)\right|^2=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$

Cauchy-Schwarz 不等式$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$

取$x_i=a_{ii}, y_1=1$ 則$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2\right)\times n$，$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^2=(\Delta u)^2$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \ge \dfrac{(\Delta u)^2}{n}$ 因為$\sum_{i\ne j} a_{ij}^2 \ge 0$

$$\left|Hess(u)\right|^2=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2+\sum_{i\ne j} a_{ij}^2 \ge \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \ge \frac{(\Delta u)^2}{n}$$

定理 4.5.2 Lichnerowicz 的估計第一特徵值λ_1

Let M be a compact n-dimensional Riemannian manifold with $Ric\ge\rho$ for some constant $\rho>0$，in the sense that for every tangent vector X $Ric(X,X)\ge\rho\langle X,X\rangle$，or equivalently，in lcal coordinates

$R_{ij}X^iX^j\ge\rho g_{ij}X^iX^j$。Then $\lambda_1\ge\dfrac{n}{n-1}\rho$

例如 S^n(r=1) 則 Ric=n-1，我們取$\rho=n-1$

則$\lambda_1\ge\dfrac{n}{n-1}\times(n-1)=n$

已知單位球面S^n的第一個非零特徵值正好就是 n。這說明了 Lichnerowicz 的估計是非常精確的（數學上稱為 Sharp Bound），它抓住了幾何與譜理論之間最緊繃的那條界限。

這個估計值的意思是：

這就像是給空間的「基本震動頻率」設了一個底線。

只要你知道空間有多彎(ρ)，你就能保證在這個空間上的物理現象（如擴散、熱傳導或波動）其演化速度不會低於某個數值。

Obata 定理：

若$\lambda_1=\frac{n}{n-1}\rho$，則這個流形在幾何上一定就是一個完美的球面。

近年 Lichnerowicz-Obata 類估計發展到 Hermitian 流形與平衡 Hermitian 流形，…

§ Lichnerowicz 估計在熱方程的應用

黎曼流形上的熱方程$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$

對一個 compact manifold 解 u(x,t)對特徵函數展開

$$u(x,t)=\bar{u}+a_1e^{-\lambda_1 t}\phi_1(x)+a_2e^{-\lambda_2 t}\phi_2(x)+...$$

根據 Lichnerowicz 估計，$Ric\geq\rho$則$\lambda_1\geq\frac{n}{n-1}\rho$，這意味著溫度的偏差

$u(x,t)-\bar{u}$ 會以至少 e $e^{-\frac{n}{n-1}\rho t}$的速度指數級衰減。

幾何對物理的強制：

空間越「彎」越快冷卻：如果一個流形的 Ricci 曲率下界ρ很大（空間極度彎曲且正向收縮），那麼λ_1 也就越大 。

物理含義：在一個曲率很強的正曲率流形上，熱量擴散得非常「有效率」。你不需要等待太久，整個系統就會達到溫度的均勻分佈。

§ Poincare 不等式與穩定性分析

在泛函分析中，λ_1等同於 Poincare 不等式的常數。

$$\int_M|\nabla f|^2\,dV\geq\lambda_1\int_M\left|f-\overline{f}\right|^2dV$$

利用 Lichnerowicz 的下界$\frac{n}{n-1}\rho$，數學家可以不需要求解複雜的偏微分方程，僅憑流形的幾何形狀（曲率ρ）就能直接給出熱傳導過程的能量衰減估計。

§ 王慕道院士：「里奇曲率下界與均曲率 H 的變分」主要出現在超曲面的第二變分公式以及 Reilly 公式的應用中。

1. 超曲面的第二變分(second variation of area)
   當我們對一個流形中的超曲面Σ進行法向變動時，其面積（或體積）的二階變化量（變分）會直接受到背景空間里奇曲率的影響。公式大致如下：

$$\delta^2 Area = \int_\Sigma (|\nabla\phi|^2 - [Ric(v,v) + |A|^2]\phi^2) d\Sigma$$

其中

(1) $Ric(v,v)$ 是背景流形在法方向上的里奇曲率。

(2)H 的變分：均曲率 H 的變化率 $\frac{\partial H}{\partial t}$ 包含了 $Ric(v,v)$ 項。

(3)物理意義：若 $Ric \geq \rho > 0$ ，這表示空間的彎曲會迫使平行超曲面更快地收縮，從而限制了均曲率沿著法向演化的行為。

2. Reilly 公式與邊值問題

Reilly 公式是證明 Lichnerowicz 估計的強大工具。

當一個區域 Ω 有邊界 $\partial\Omega$ 時，Reilly 公式建立了以下聯繫：

內部性質：里奇曲率 Ric 的下界 。

邊界性質：邊界的均曲率 H。

如果我們設定一個函數 u 在邊界上為常數，Reilly 公式會顯示出：

如果里奇曲率有正下界 ρ ，且邊界的平均曲率 H 為正，那麼該區域的大小（直徑）與特徵值 λ_1 就會受到嚴格限制。

3. 在廣義相對論中的應用

王教授的研究重心之一是廣義相對論。在準局部質量（Quasilocal Mass）的理論中：

(1)他利用均曲率向量（Mean Curvature Vector）來描述曲面在時空中的嵌入方式。

(2)里奇曲率（透過愛因斯坦場方程與能量動量張量相連）的下界條件，會限制這些曲面如何發生變分。

(3)這最終導致了對於「質量」的定義——這可以看作是 Lichnerowicz 型估計在更複雜物理背景下的推廣。

定理 4.5.3 (Bochner harmonic 1-form)

Let M be a compact Riemannian manifold with nonnegative Ricci curvature。

Then every harmonic 1-form ω is parallel。(i.e. $\Delta\omega \equiv 0$)

In particular，the first de Rham cohomology group satisfies $\dim H^1_{dR}(\mathrm{M,R}) \leq \mathrm{n}$

If M is a compact Riemannian manifold of positive Ricci curvature，then M has no nontrivial harmonic 1-form。Thus $H^1_{dR}(M,R) = \{0\}$

§ 調和 1-form 與第一 Betti 數

定理 在一個緊緻的可定向黎曼流形上，如果里奇曲率非負， 則第一個 Betti 數 b_1 不大於流形的維數 n；如果存在某一點里奇曲率嚴格正，則 b_1=0。

範例 關於 Killing vector field 的 Bochner 定理(1946 年)
在一個緊緻（緊緻可以粗略理解為封閉且有限大）的黎曼流形上，如果其里奇曲率處處為負，那麼該流形上不存在非零的 Killing 向量場。

$\nabla_X g = 0$ ：沿著該向量場的方向，流形的度量是不變的，也就是流形在該方向有一個連續的對稱性。例如，球面存在著旋轉對稱性，這些旋轉就對應著球面上的 Killing 向量場。

§ Bochner 技術

1. 選定目標 例如 Killing vector field
2. 推導公式 $\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\Delta X|^2 - Ric(X,X)$ 其中 X 是 Killing vector field

   包含曲率的公式例如 Weitzenbock 公式
3. 曲率條件的影響 $|X|^2$ 是一個下調和函數。
4. 應用最大值原理

   在一個緊緻的流形上，一個光滑的下調和函數必然是一個常數（最大值原理）。因此 $|X|^2$ 是常數。
5. 得出結論

Bochner 公式

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = |\nabla\omega|^2 + Ric(\omega^\#, \omega^\#)$$

Bochner 定理及其背後的 Bochner 技術，提供了一種通過曲率來控制拓撲和幾何結構的強有力的解析方法。它優美地展現了分析、幾何和拓撲之間的深刻聯繫。

Bochner 技術的應用非常廣泛，除了 Killing 向量場和調和形式，它還被用於研究調和映射和旋量場。

王慕道：均曲率流與廣義相對論

找到一個在演化中會滿足某個微分不等式的幾何量，然後通過最大值原理，斷言這個量的極值行為被控制住，從而得到我們想要的幾何信息。

如何嚴格定義廣義相對論中的「角動量」

空間形式中均曲率流是一種使子流形體積以最快速度縮減的幾何演化過程，具有保持凸性、趨向極小曲面或奇異點收斂的性質。

1. 體積減少與收斂

2. 保持凸性

3. 奇異點形成

4. 形狀保持性質

定理 4.5.4 (Lichnerowicz harmonic spinor field)
Let M be a compact spin manifold。If M has nonnegative scalar curvature，then every harmonic spinor field is parallel。If the scalar curvature is positive，then every harmonic spinor field vanishes。

習作

1. ∇^* is the formal adjoint of ∇，prove that $\nabla^*\nabla = -tr\nabla^2$

(1)Formal adjoint 的定義

$\int_M \langle \nabla s, T\rangle = \int_M \langle s, \nabla^* T\rangle$ 對所有截面 s 與張量 T 都成立

當 $T = \nabla s$ ，$\int_M |\nabla s|^2 = \int_M \langle s, \nabla^*\nabla s\rangle$

(2)取局部正交標架

取一組 local orthonormal frame $\{e_1,\dots,e_n\}$ 則

$\nabla s = \sum_i (\nabla_{e_i} s)\otimes e^i$ ， $|\nabla s|^2 = \sum_i |\nabla_{e_i} s|^2$

(3)計算 divergence

考慮向量場 $X_i = \langle \nabla_{e_i} s, s\rangle e_i$ 其散度 $divX = \sum_i e_i \langle \nabla_{e_i} s, s\rangle$

$e_i \langle \nabla_{e_i} s, s\rangle = \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} s, s\rangle + |\nabla_{e_i} s|^2$ 所以 $divX = \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} s, s\rangle + \sum_i |\nabla_{e_i} s|^2$

(4)積分並使用 Stokes 定理

在 compact manifold 上 $\int_M divX = 0$

所以 $\int_M |\nabla s|^2 = -\int_M \left\langle \sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} s, s\right\rangle$

(5)與 adjoint 定義比較

與(1)比較 $\nabla^*\nabla s = -\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} s = -tr(\nabla^2 s)$

另一種寫法

$s \in \Gamma(E)$ is a section of vector bundle E，∇_s is the covariant derivative，∇_s 作為 operator $(\nabla_s)(Y) = \nabla_Y s$

1. ∇^* 是 ∇ 的 formal adjoint：$\int_M \langle \nabla s, \alpha \rangle dV = \int_M \left\langle s, \nabla^* \alpha \right\rangle dV$
2. $\nabla^* \alpha = -\sum_i (\nabla_{e_i} \alpha)(e_i)$ is negative divergence for the orthonormal frame $\{e_i\}$
3. $tr\nabla^2 s = \sum_i \nabla^2 s(e_i, e_i)$
4. $(\nabla_X A)Y = \nabla_X (A(Y)) - A(\nabla_X Y)$
5. $\nabla_s^2(X,Y) := (\nabla_X \nabla_s)(Y) = \nabla_X(\nabla_s(Y)) - \nabla_s(\nabla_X Y) = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_{\nabla_X Y} s$ (第 4 式中 A 用 ∇_s 代入)

第(2)式中，α 用 ∇s 代入 $\nabla^*\nabla s = -\sum_i (\nabla_{e_i}(\nabla s))(e_i) = -\sum_i \nabla^2{}_s(e_i, e_i) = -tr\nabla^2 s$

所以 $\nabla^*\nabla = -tr\nabla^2$