§ Bochner Theorem [GA4.5.3]

範例 關於 Killing vector field 的 Bochner 定理(1946 年)

在一個緊緻（緊緻可以粗略理解為封閉且有限大）的黎曼流形上，如果其里奇曲率處處為負，那麼該流形上不存在非零的 Killing 向量場。

$\nabla_X g = 0$ ：沿著該向量場的方向，流形的度量是不變的，也就是流形在該方向有一個連續的對稱性。例如，球面存在著旋轉對稱性，這些旋轉就對應著球面上的 Killing 向量場。

§ Bochner 技術

1. 選定目標　例如 Killing vector field
2. 推導公式　$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\Delta X|^2 - Ric(X,X)$ 其中 X 是 Killing vector field

   包含曲率的公式例如 Weitzenbock 公式
3. 曲率條件的影響　$|X|^2$ 是一個下調和函數。
4. 應用**最大值原理**

   在一個緊緻的流形上，一個光滑的下調和函數必然是一個常數（最大值原理）。因此 $|X|^2$ 是常數。
5. 得出結論

§ 調和 1-form 與第一 Betti 數

定理 在一個緊緻的可定向黎曼流形上，如果里奇曲率非負，則第一個 Betti 數 b_1 不大於流形的維數 n；如果存在某一點里奇曲率嚴格正，則b_1。

Bochner 公式

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = |\nabla\omega|^2 + Ric(\omega^\#, \omega^\#)$$

Bochner 定理及其背後的 Bochner 技術，提供了一種通過曲率來控制拓撲和幾何結構的強有力的解析方法。它優美地展現了分析、幾何和拓撲之間的深刻聯繫。

Bochner 技術的應用非常廣泛，除了 Killing 向量場和調和形式，它還被用於研究調和映射和旋量場。

王慕道：均曲率流與廣義相對論

找到一個在演化中會滿足某個微分不等式的幾何量，然後通過最大值原理，斷言這個量的極值行為被控制住，從而得到我們想要的幾何信息。

如何嚴格定義廣義相對論中的「角動量」

空間形式中均曲率流是一種使子流形體積以最快速度縮減的幾何演化過程，具有保持凸性、趨向極小曲面或奇異點收斂的性質。

1. 體積減少與收斂
2. 保持凸性
3. 奇異點形成
4. 形狀保持性質