§ The Bochner formula [GA4.5.2]

(M,g)是黎曼流形，α是 1-form 則$\Delta\alpha=\nabla^*\nabla\alpha+\mathrm{R}(\alpha)$

1. Bochner 公式又稱 Bochner-Weitzenbock 恆等式)
   1-form：$\Delta\omega=\nabla^*\nabla\omega+\mathrm{R}ic(\omega^\#,.)$
2. $\Delta=d\delta+\delta d$ 是 Hodge Laplacian
3. $\nabla^*\nabla$：Bochner Laplacian(或 Rough Laplacian)，∇^*是∇的 adjoint
4. 兩 Laplace 算子的差異由流形的曲率決定。

一般形式：Weitzenbock 恆等式

對於和 metric 相容的 vector boundle E，ϕ是 E 上的截面則$\Delta\phi=\nabla^*\nabla\phi+R(\phi)$

1. 函數 $\Delta f=\nabla^*\nabla f$
2. p-form：(M,g) compact，$\Delta=-\mathrm{tr}\nabla^2-\sum_{i,j}\eta^i\wedge\iota_{e_j}R(e_i,e_j)$

   其中$\{e_j\}$是 an orthonormal local frame，$\{\eta^i\}$是 dual frame。
3. spinor：$D^2\psi=\nabla^*\nabla\psi+\dfrac{1}{4}R\psi$

§ Bochner principle 是指利用上述公式，透過對流形進行積分與分析，來證明某些幾何對象（如調和形式、Killing 場或旋量）必須「消失」（為零）或為「平行」（Parallel）的技術。

維度	Bochner Formula (公式)	Bochner Principle (原理)
性質	局部的代數恆等式。	全域的解析/幾何推理。
內容	描述算子、導數與曲率的定量關係。	描述曲率的正負如何限制拓撲性質（如 Betti 數）。
結論範例	$D^2=\nabla^*\nabla+\frac{R}{4}$。	「若 $R>0$，則不存在非零的調和旋量」。

Bochner 公式在特徵值估計的應用 $\dfrac{1}{2}\Delta|df|^2=|\nabla^2 f|^2+\langle\nabla f,\nabla(\Delta f)\rangle+Ric(\nabla f,\nabla f)$

1. $Ric\geq\rho\Rightarrow\lambda_1\geq\dfrac{n}{n-1}\rho$
2. Obata 定理
3. Fridrich 不等式
4. Li-Yau 估計

習作

1. ∇^* is the formal adjoint of ∇，prove that $\nabla^*\nabla = -tr\nabla^2$

(1)Formal adjoint 的定義

$\int_M \langle \nabla s, T\rangle = \int_M \langle s, \nabla^* T\rangle$ 對所有截面 s 與張量 T 都成立

當 $T = \nabla s$ ，$\int_M |\nabla s|^2 = \int_M \langle s, \nabla^*\nabla s\rangle$

(2)取局部正交標架

取一組 local orthonormal frame $\{e_1,\dots,e_n\}$ 則

$\nabla s = \sum_i (\nabla_{e_i} s)\otimes e^i$ ， $|\nabla s|^2 = \sum_i |\nabla_{e_i} s|^2$

(3)計算 divergence

考慮向量場 $X_i = \langle \nabla_{e_i} s, s\rangle e_i$ 其散度 $divX = \sum_i e_i \langle \nabla_{e_i} s, s\rangle$

$e_i \langle \nabla_{e_i} s, s\rangle = \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} s, s\rangle + |\nabla_{e_i} s|^2$ 所以 $divX = \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} s, s\rangle + \sum_i |\nabla_{e_i} s|^2$

(4)積分並使用 Stokes 定理

在 compact manifold 上 $\int_M divX = 0$

所以 $\int_M |\nabla s|^2 = -\int_M \left\langle \sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} s, s\right\rangle$

(5)與 adjoint 定義比較

與(1)比較 $\nabla^*\nabla s = -\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} s = -tr(\nabla^2 s)$

另一種寫法

$s \in \Gamma(E)$ is a section of vector bundle E，∇_s is the covariant derivative，∇_s 作為 operator $(\nabla_s)(Y) = \nabla_Y s$

1. ∇^* 是 ∇ 的 formal adjoint： $\int_M \langle \nabla s, \alpha\rangle dV = \int_M \langle s, \nabla^*\alpha\rangle dV$

2. $\nabla^*\alpha = -\sum_i (\nabla_{e_i}\alpha)(e_i)$ is negative divergence for the orthonormal frame $\{e_i\}$

3. $tr\nabla^2 s = \sum_i \nabla^2 s(e_i, e_i)$

4．$(\nabla_X A)Y = \nabla_X(A(Y)) - A(\nabla_X Y)$

5．$\nabla_s^2(X,Y) := (\nabla_X \nabla_s)(Y) = \nabla_{\mathrm{X}}(\nabla_s(Y)) - \nabla_s(\nabla_X Y) = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_{\nabla_X Y} s$ （第 4 式中 A 用∇_s代入）

第(2)式中，α 用∇s代入 $\nabla^*\nabla s = -\sum_i (\nabla_{e_i}(\nabla s))(e_i) = -\sum_i \nabla^2{}_s(e_i, e_i) = -tr\nabla^2 s$

所以$\nabla^*\nabla = -tr\nabla^2$