§ Spectral gap

「譜間隙」(spectral gap)是線性代數、量子力學、幾何分析與隨機過程裡一個非常核心的概念。

Bochner 框架中的譜間隙：

在黎曼流形(M,g)上，Bochner 公式：

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + Ric(\nabla f, \nabla f)$$ 其中 f 是函數

(1) $|\nabla^2 f|^2$ ：二階變化，曲率形鋼性

(2) $\langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle$ ：PDE 結構

(3) $Ric(\nabla f, \nabla f)$ ：曲率項(幾何核心)

今設 $-\Delta f = \lambda f$ ，Bochner 公式在 compact manifold 上積分(沒有邊界)

所以 $\int_M \Delta|\nabla f|^2 = 0$

$$0 = \int_M |\nabla^2 f|^2 + \int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + \int_M Ric(\nabla f, \nabla f)$$ ，$|\nabla^2 f|^2 \geq 0$ 扔掉

$$-\Delta f = \lambda f \Rightarrow \int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle = -\lambda \int_M |\nabla f|^2$$

假設 $Ric \geq (n-1)Kg \Rightarrow Ric(\nabla f, \nabla f) \geq (n-1)K|\nabla f|^2$

$$\int_M [(n-1)K - \lambda]|\nabla f|^2 \leq 0$$

因為 f 是非平凡的特徵函數，不可能是常數，所以 $\nabla f \neq 0$ ，因此 $\int_M |\nabla f|^2 > 0$

$\therefore \lambda \geq (n-1)K$

譜間隙的下界，是因為 Ricci 曲率讓梯度能量無法過度集中，從而限制了 Laplacian 的最低振動頻率。

物理上的量子力學暫且略過。

David Hilbert Kurt $G\ddot{o}del$ Alan Turning

數學上的不可判定性(undecidability)：科學人 [https://www.scitw.cc/posts/9031]

2015 年，研究人員證明了「判定一個量子多體系統是否存在譜間隙」是一個不可判定問題。(Toby S. Cubitt，David Perez-Garcia，Michael Wolf)

(Undecidable Problem)。這意味著，不存在一個通用的算法可以在有限時間內判斷給定的任意複雜量子系統是否具有譜間隙。這甚至引申出某些物理系統的譜間隙問題與數學公理系統的邏輯一致性有關，這在物理學界被視為一個深遠

的理論極限。
這項發現將量子物理從單純的「計算科學問題」提升到了「數學基礎論」的高度。它提醒我們，物理學的預測能力不僅受限於實驗精度，更受限於數學邏輯本身的結構性缺陷。

幾何分析（Geometric Analysis）與量子物理中提到的譜間隙，在本質上探討的是同一個數學對象：線性算子（特別是拉普拉斯算子，Laplace Operator）的特徵值分佈。
算子譜是共同的核心，無論在幾何分析還是量子力學中，我們都在研究一個自伴算子（Self-adjoint operator）A 的特徵值問題：$A\psi = \lambda\psi$
幾何分析中是 λ_1。量子物理中是 $\Delta = E_1 - E_0$
$A\psi = \lambda\psi$，A 是系統的哈密頓量(Hamiltonian) H。
幾何分析中，譜間隙 λ_1 的大小直接反映了流形的幾何與拓撲結構。
(1) Cheeger 不等式：

(2) 收斂速度：在隨機過程（如布朗運動）中，λ_1 決定了擴散過程趨向於平衡態（平穩分佈）的指數收斂速率。間隙越大，混合越快（Mixing time 越短）

特徵	幾何分析 (幾何算子)	量子物理 (哈密頓量)
研究對象	拉普拉斯算子 (Δ)	哈密頓量 (H)
基態	常數函數 (對應 $\lambda_0 = 0$)	基態波函數 (對應 E_0)
譜間隙定義	λ_1 (第一非零特徵值)	$E_1 - E_0$
物理/幾何意義	流形的連通度、混合時間	基態穩定性、量子相變

簡而言之，幾何分析中的譜間隙物理學將其應用於量子態的穩定性預測。

後記：
用 Lean 4 形式化從新證明譜間隙問題的不可判定性。