

§ Connections for Spin Structures and Dirac Operator [GA4.4]
 (M,g)是一黎曼流形，metric g 與 connection ∇ 定義在切叢 TM 上，擴展到張量叢 $T^{p,q}M$ 。

在黎曼流形上，聯絡與度量相容； $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) = g(Y, \nabla_X Z)$

誘導出一個定義在 Clifford 叢上的聯絡，仍記為 ∇ ，則

對於任何向量場 X, Y 和 Clifford 叢的截面 ϕ ， $\nabla_X(Y \cdot \phi) = (\nabla_X Y) \cdot \phi + Y \cdot (\nabla_X \phi)$
 這裡的 \cdot 是 Clifford 乘法。

一個 metric connection D 可以如是分解 $D = d + A$ 則對任意 $X \in TM$ ， $A(X)$ 是一反對稱矩陣 $A(X) \in o(n)$ 。

Lemma 4.4.1

For smooth section μ, ν of $Cl(P)$ or $Cl^C(P)$ (Clifford bundle) we have
 $\nabla(\mu\nu) = \nabla(\mu)\nu + \mu\nabla(\nu)$

例 1

S^2 上， $g = ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ ， $e_1 = \partial_\theta, e_2 = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi$ 是一組正交基

向量場 $X = \sigma^1 e_1 + \sigma^2 e_2$ ，D 是 S^2 上的 Levi-Civita connection 則

$$DX = D \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\sigma^1 \\ d\sigma^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta d\phi \\ \cos \theta d\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$$

例 2

S^2 上， $e_1 = \partial_\theta, e_2 = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi$ 是 Clifford bundle $Cl(S^2)$ 上的 section

令公式中的 $\mu = e_1, \nu = e_2$ 則 $\mu\nu = e_1 e_2$ (這在 Clifford 代數中代表該點的單位旋

轉平面或面積元) 取 $X = e_2$

在 S^2 上的 Levi-Civita 聯絡 $\nabla_{e_2} e_1 = \cot \theta e_2$ $\nabla_{e_2} e_2 = -\cot \theta e_1$

在 Clifford algebra 中 $e_1^2 = e_2^2 = -1$

$$\nabla_{e_2}(e_1 e_2) = (\nabla_{e_2} e_1) e_2 + e_1 (\nabla_{e_2} e_2) = (\cot \theta e_2) e_2 + e_1 (-\cot \theta e_1) = -\cot \theta + \cot \theta = 0$$

這個計算結果 $\nabla_x(e_1e_2)=0$ 告訴我們一個非常重要的物理事實：

平行移動不改變面積元：儘管單個向量 e_1 或 e_2 在球面上移動時會旋轉

（ $\nabla e \neq 0$ ），但由它們組成的 Clifford 乘積（面積元素）在 Levi-Civita 聯絡下是平行（Parallel）的。

這保證了球面的幾何性質（如面積）不會因為你在球面上移動而「縮水」或「膨脹」。

要深入理解 $\nabla=d+A$ 如何誘導出 Clifford bundle 上的 Leibniz 法則，我們需要把重點放在 $so(n)$ 的元素如何「變身」成 Clifford 代數中的運算子。

這裡的核心邏輯在於：Lie 群的伴隨表示（Adjoint representation）在無窮小層次上表現為「交換子（Commutator）」。

1. 從 $so(n)$ 到 bivectors

在黎曼幾何中，聯絡形式 A 是一個取值於李代數 $so(n)$ 的 1-form。為了讓 A 能在 Clifford bundle $Cl(M)$ 上，我們利用一個重要的同構關係

$so(n) \cong \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \subset Cl(n)$ 具體來說，如果 A 在局部正規正交基底下的矩陣元

是 A_{ij} ，那麼它對應到 Clifford 代數中的元素（即 Spin 元素）就是

$$A_{Cl} = \frac{1}{4} \sum_{i,j} A_{ij} e_i e_j$$

2. $SO(n)$ 作用的擴展方式

當我們說 $SO(n)$ 的作用擴展到 $Cl(M)$ 時，是指對於任何 $g \in SO(n)$ ，它對 Clifford 元素 μ 的作用是：

$$\rho(g)\mu = g\mu g^{-1} \quad (\text{這本質上是在做基底旋轉})。$$

當我們轉向李代數層次（即微分層次）時，這個作用變成了交換子作用。對於 $A \in so(n)$ ，其作用於 $\mu \in Cl(M)$ 定義為：

$$A \cdot \mu = [A_{Cl}, \mu] = A_{Cl}\mu - \mu A_{Cl}$$

3. 細節解釋

$\nabla = d + A$ 中， d 是對分量的普通微分， A 是上述的交換子作用。

當我們計算 $\nabla(\mu\nu)$ 時

$$(1) \text{ 微分部分滿足 } d(\mu\nu) = (d\mu)\nu + \mu(d\nu)$$

$$(2) \text{ 代數部分 } A \cdot (\mu\nu) = [A_{Cl}, \mu\nu] = [A_{Cl}, \mu]\nu + \mu[A_{Cl}, \nu]$$

$$\text{兩部分結合起來 } \nabla(\mu\nu) = (d\mu + [A_{Cl}, \mu])\nu + \mu(d\nu + [A_{Cl}, \nu]) = \nabla(\mu)\nu + \mu\nabla(\nu)$$

§ 手性算符(Chirality Operator)也稱 Volume Element，記為 Γ 。

給定一個 n 維的黎曼（或偽黎曼）流形 M ，在每一點 x ，切空間 $T_x M$ 生成一個 Clifford 代數。

在局部選取一組正交歸一架構 $\{e_1, \dots, e_n\}$ ，對應的 Clifford 代數生成元（伽瑪矩陣）滿足反對易關係： $\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2g_{ij}I$

手性算符 Γ ： $\Gamma = (i)^m \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ 通常會加上一個歸一化因子以確保其平方為 ± 1

或者在某些約定下（尤其物理文獻中）為 $\gamma^{n+1} = i^{-s} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ 使得 $\Gamma^2 = I$

如果 n 是偶數： Γ 與所有的 γ_i 反對易（ $\Gamma \gamma_i = -\gamma_i \Gamma$ ）。這使得我們可以將旋量空間分解為兩個手性（Chirality）子空間（左手和右手）。

如果 n 是奇數： Γ 與所有的 γ_i 對易，因此在不可約表示中，它通常是一個常數倍數（類似於單位矩陣），這代表在奇數維度中手性不是一個有用的「二分」概念。

例 二維空間的 Clifford bundle

例如球面 S^2 ，我們在局部取正交基 e_1, e_2 ，對應的 Clifford 生成元可以選 Pauli 矩

$$\text{陣 } \gamma_1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ 手性算符 } \Gamma = -i\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3$$

例 四維時空的 Clifford bundle

這是最常見的物理例子（例如在廣義相對論或粒子物理中）。在四維洛倫茲流形（度規簽名為 $+, -, -, -$ ）中，Clifford 生成元通常記為 γ^μ （ $\mu = 0, 1, 2, 3$ ）。

手性算符通常記為 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

四維時空中的狄拉克旋量（Dirac spinor） ψ 是一個四分量旋量場。手性算符 γ^5 將它投影成兩個 Weyl 旋量：

$$\text{左手分量： } \psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi \quad \text{右手分量： } \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi$$

幾何意義：

在這個 Clifford bundle $Cl(M)$ 中，手性算符不僅是一個代數元素，它還對應於流形的定向體積元。在流形上積分時，手性算符與霍奇星算子（Hodge star）有密切關聯。例如，在拉格朗日密度中，手性算符的出現代表了相互作用對左右手旋量的不同耦合方式（弱交互作用就是一個經典例子，它只耦合左手粒子）。

Lemma 4.4.2 $\nabla(\Gamma) = 0$

手性算符在 $SO(n)$ 作用下不變（即與生成元對易），導致協變導數中的聯絡項貢獻為零，從而整體協變導數為零。

Definition 2.6.3 Let e_1, \dots, e_n be a positive orthonormal basis of V . The *chirality operator* is

$$\Gamma = i^m e_1 \dots e_n \in Cl^C(V)$$

with $m = \frac{n}{2}$ for even n , $m = \frac{n+1}{2}$ for odd n .

Lemma 4.4.3

For smooth section $\mu \in Cl^C(P)$, $\sigma \in S_n$ (spinor bundle)

$\nabla(\mu\sigma) = \nabla(\mu)\sigma + \mu\nabla(\sigma)$ （這裡是 Clifford 乘法）

$$A = \sum_{i < j} \Omega_{ij} e_i \wedge e_j$$

自旋叢是一個向量叢，它的每個截面（section）被稱為一個旋量場（spinor field）。

The Dirac operator D 作用在 Spin bundle S_n 的截面 σ 上：

$D\sigma(x) = e_i \nabla_{e_i}(\sigma)(x)$ 其中 $\{e_i\}$ 是 $T_x M$ 的么正基。右邊的乘積是 Clifford 乘積。

Example We consider the case of \mathbb{R}^2 with coordinates x, y . Recalling the discussion in §2.6, the spinor space then is \mathbb{C}^2 , and the vectors e_1 and e_2 act on spinors via

$$\gamma(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Writing a spinor field $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ in components as $\begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$, we then have

$$\not\partial\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma^1}{\partial x} \\ \frac{\partial\sigma^2}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma^1}{\partial y} \\ \frac{\partial\sigma^2}{\partial y} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma^2}{\partial \bar{z}} \\ -\frac{\partial\sigma^1}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.4.8)$$

Thus, in this case, the Dirac operator is simply the Cauchy–Riemann operator.

Definition 4.4.1

- (i) Let $\tilde{P} \rightarrow M$ be a spin structure on the oriented Riemannian manifold M , with Levi-Civita connection ∇ as explained above. The *Dirac operator* $\not\partial$ operates on sections σ of the spinor bundle \mathcal{S}_n via

$$\not\partial\sigma(x) = e_i \nabla_{e_i}(\sigma)(x) \quad (4.4.7)$$

where $e_i, i = 1, \dots, n$, is an orthonormal basis of $T_x M$ ($x \in M$). The product on the right-hand side of (4.4.7) is given by Clifford multiplication.

- (ii) Let $\tilde{P}^c \rightarrow M$ be a spin^c structure on M , and let A represent a unitary connection on the associated determinant line bundle L . The *Dirac operator* $\not\partial_A$ operating on \mathcal{S}_n is given by

$$\not\partial_A\sigma(x) = e_i \nabla_{A, e_i}(\sigma)(x).$$

定理 4.4.1(Lichnerowicz)

Let M be a spin manifold with a local orthonormal frame field

e_1, \dots, e_n , then $D^2 = -\nabla_{e_i, e_i}^2 + \frac{1}{4}R$ where R is the scalar curvature of M

定理 4.4.2(同上)

∇_A is a spin^c connection, then $D_A^2 = -\nabla_{A, e_i, e_i}^2 + \frac{1}{4}R + \frac{1}{2}F_A$

Theorem 4.4.2 Let M be a spin^c manifold with a local orthonormal frame field e_1, \dots, e_n and a spin^c connection ∇_A . The Dirac operator \not{D}_A satisfies

$$\not{D}_A^2 = -\nabla_{A, e_i e_i}^2 + \frac{1}{4}R + \frac{1}{2}F_A, \quad (4.4.21)$$

where F_A , an imaginary valued two-form, is the curvature of A . (F_A acts on spinors by Clifford multiplication; in our frame field, $\sum_{i < j} F_{A, ij} e_i \wedge e_j$ becomes $\frac{1}{2} \sum_{i < j} F_{A, ij} e_i e_j$ as usual.)

[Spinot501-2DiracOperator]

$$D = i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu = i\hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial(ct)} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

Lichnerowicz 公式 $D^2 = \Delta_S + \frac{1}{4}R$; Δ_S 是旋量叢上的拉普拉斯算子。

這裡有一個習作

二維球面 S^2 (半徑為 R) 上的 Dirac 算子，利用 Lichnerowicz 公式求 S^2 的純量曲率，並寫出 D^2 與 Δ_S 的關係。

§ twistor spinor(扭量旋量)

The spinor σ is called a twistor spinor if $\nabla_V \sigma + \frac{1}{2}V \cdot D\sigma = 0$ for any vector field on S^2 。

V : S^2 上的任意向量場。

∇_V : 旋量叢上的 Levi-Civita connection

D : Dirac 算子

在 n 維流形上的扭量方程： $\nabla_X \psi + \frac{1}{n} X \cdot D\psi = 0$ 。• 是 Clifford 乘法。

在像 S^2 這種正定常曲率流形中，twistor spinor 與 Killing spinor 有密切關係：

扭量(1960 Roger Penrose 提出)是將物理上的光學傳播與數學上的共形幾何結合的產物。它讓我們不再透過坐標點來觀察世界，而是透過「光線的集合」來理解時空的構造。

Penrose Transform 證明了扭量空間上的全純對象與時空中的無質量場方程 (如 Maxwell 方程、無質量 Dirac 方程、或線性化的引力波方程) 的解之間存在一一對應關係。