§ 手性算符(Chirality Operator)

手性算符也稱 Volume Element，記為Γ。

給定一個 n 維的黎曼（或偽黎曼）流形 M，在每一點x，切空間$T_x M$ 生成一個 Clifford 代數。

在局部選取一組正交歸一架構$\{e_1,...,e_n\}$，對應的 Clifford 代數生成元（伽瑪矩陣）滿足反對易關係：$\gamma_i\gamma_j+\gamma_j\gamma_i=2g_{ij}I$

手性算符Γ：$\Gamma=(i)^m\gamma_1\gamma_2...\gamma_n$ 通常會加上一個歸一化因子以確保其平方為± 1）

或者在某些約定下（尤其物理文獻中）為$\gamma^{n+1}=i^{-s}\gamma_1\gamma_2...\gamma_n$ 使得$\Gamma^2=I$

如果 n 是偶數：Γ與所有的γ_i反對易（$\Gamma\gamma_i=-\gamma_i\Gamma$）。這使得我們可以將旋量空間分解為兩個手性（Chirality）子空間（左手和右手）。

如果 n 是奇數：Γ與所有的γ_i對易，因此在不可約表示中，它通常是一個常數倍數（類似於單位矩陣），這代表在奇數維度中手性不是一個有用的「二分」概念。

例 二維空間的 Clifford bundle

例如球面S^2，我們在局部取正交基e_1,e_2，對應的 Clifford 生成元可以選 Pauli 矩陣$\gamma_1=\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\gamma_2=\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$ 手性算符$\Gamma=-i\gamma_1\gamma_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\sigma_3$

例 四維時空的 Clifford bundle

這是最常見的物理例子（例如在廣義相對論或粒子物理中）。在四維洛倫茲流形（度規簽名為$+,-,-,-$）中，Clifford 生成元通常記為γ^μ（$\mu=0,1,2,3$）。

手性算符通常記為$\gamma^5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}0&I\\I&0\end{pmatrix},\gamma^i=\begin{pmatrix}0&\sigma^i\\-\sigma^i&0\end{pmatrix}\quad\gamma^5=\begin{pmatrix}-I&0\\0&I\end{pmatrix}$$

四維時空中的狄拉克旋量（Dirac spinor）ψ是一個四分量旋量場。手性算符γ^5將它投影成兩個 Weyl 旋量：

左手分量：$\psi_L=\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi$　　右手分量：$\psi_R=\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi$

幾何意義：

在這個 Clifford bundle $Cl(M)$中，手性算符不僅是一個代數元素，它還對應於流形的定向體積元。在流形上積分時，手性算符與霍奇星算子（Hodge star）有密切關聯。例如，在拉格朗日密度中，手性算符的出現代表了相互作用對左右手旋量的不同耦合方式（弱交互作用就是一個經典例子，它只耦合左手粒子）。