§ Clifford bundle [GA4.4.1]

(M,g)是一黎曼流形，metric g 與 connection ∇定義在切叢 TM 上，擴展到張量叢 $T^{p,q}M$。

在黎曼流形上，聯絡與度量相容；

$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) = g(Y, \nabla_X Z)$

Clifford 叢 Cl(M)的纖維是 Clifford 代數$Cl(T_x M, g_x)$

…誘導出一個定義在 Clifford 叢上的聯絡，記為∇^{cl}，則

對於任何向量場 X 和 Clifford 叢的截面 s，有$\nabla_X^{cl}(v\cdot s) = (\nabla_X v)\cdot s + v\cdot(\nabla_X^{cl} s)$

這裡的•是 Clifford 乘法。

Clifford 叢 Cl(TM)：其上的每一點$x\in M$ 的纖維是切空間$T_p M$ 對應的 Clifford 代數$Cl(T_x M, g_x)$

這個代數是由$T_p M$ 中的向量經由以下關係式（Clifford 乘法）生成的：

$v\cdot w + w\cdot v = -2g(v,w)\cdot 1$ 其中$v, w\in T_x M$

(1) 擴展到張量叢
(2) 保持理想(Ideal)
(3) Clifford 上的 Leibnitz 法則

擴展後的連絡具有以下重要性質：
(1) 與 metric 相容
(2) 與 Clifford 作用相容：可以定義 Dirac 算子
(3) 曲率繼承

接著要擴展到旋量叢！

DeepSeek 有這麼比喻：

想象你在做陶藝，先把陶土（切叢）塑造成一個簡單的泥碗（張量叢），並在上面刻了一些花紋（Levi-Civita 聯絡）。然後你決定把這個泥碗放進一個特定形狀的模具（Clifford 代數的商結構）裡，壓制成一個更精巧的藝術品（Clifford 叢）。關鍵是，你壓制的手法（商映射）很巧妙，使得泥碗上的花紋（聯絡）沒有被壓壞或消失，而是完美地轉移到了最終的藝術品上，成為了新作品的一部分。這個過程就是聯絡的「誘導」。

Lemma

For smooth section μ,ν of Cl(M)，we have $\nabla(\mu\nu)=\nabla(\mu)\nu+\mu\nabla(\nu)$

例 S^2 上

$e_1=\partial_\theta, e_2=\dfrac{1}{\sin\theta}\partial_\phi$ 是 Clifford bundle $\mathrm{Cl(S^2)}$ 上的 section

令公式中的 $\mu=e_1,\nu=e_2$ 則 $\mu\nu=e_1e_2$ （這在 Clifford 代數中代表該點的單位旋轉平面或面積元）取 $X=e_2$

在 S^2 上的 Levi-Civita 聯絡

$\nabla_{e_2}e_1=\cot\theta e_2 \quad \nabla_{e_2}e_2=-\cot\theta e_1$

在 Clifford algebra 中 $e_1^2=e_2^2=-1$

$$\nabla_{e_2}(e_1e_2)=(\nabla_{e_2}e_1)e_2+e_1(\nabla_{e_2}e_2)=(\cot\theta e_2)e_2+e_1(-\cot\theta e_1)=-\cot\theta+\cot\theta=0$$

這個計算結果 $\nabla_X(e_1e_2)=0$ 告訴我們一個非常重要的物理事實：

平行移動不改變面積元：儘管單個向量 e_1 或 e_2 在球面上移動時會旋轉（$\nabla e\neq 0$ ），但由它們組成的 Clifford 乘積（面積元素）在 Levi-Civita 聯絡下是平行（Parallel）的。

這保證了球面的幾何性質（如面積）不會因為你在球面上移動而「縮水」或「膨脹」。

要深入理解 ∇=$d+A$ 如何誘導出 Clifford bundle 上的 Leibniz 法則，我們需要把重點放在 so(n)的元素如何「變身」成 Clifford 代數中的運算子。

這裡的核心邏輯在於：Lie 群的伴隨表示（Adjoint representation）在無窮小層次上表現為「交換子（Commutator）」。

1. 從 so(n)到 bivectors

   在黎曼幾何中，聯絡形式 A 是一個取值於李代數 so(n)的 1-form。為了讓 A 能在 Clifford bundle $Cl(M)$ 上，我們利用一個重要的同構關係 $so(n)\cong\Lambda^2(R^n)\subset Cl(n)$ 具體來說，如果 A 在局部正規正交基底下的矩陣元是 A_{ij} ，那麼它對應到 Clifford 代數中的元素(即 Spin 元素)就是

   $$A_{Cl}=\frac{1}{4}\sum_{i,j}A_{ij}e_ie_j$$

2. SO(n)作用的擴展方式

當我們說 SO(n)的作用擴展到$Cl(M)$時，是指對於任何$g \in SO(n)$，它對 Clifford 元素μ的作用是：

$\rho(g)\mu = g\mu g^{-1}$ （這本質上是在做基底旋轉）。

當我們轉向李代數層次（即微分層次）時，這個作用變成了交換子作用。對於$A \in so(n)$，其作用於$\mu \in Cl(M)$ 定義為：

$$A \cdot \mu = [A_{Cl}, \mu] = A_{Cl}\mu - \mu A_{Cl}$$

3. 細節解釋

$\nabla = d + A$中，d 是對分量的普通微分，A 是上述的交換子作用。

當我們計算$\nabla(\mu\nu)$時

(1) 微分部分滿足$d(\mu\nu) = (d\mu)\nu + \mu(d\nu)$
(2) 代數部分 $A \cdot (\mu\nu) = [A_{Cl}, \mu\nu] = [A_{Cl}, \mu]\nu + \mu[A_{Cl}, \nu]$

兩部分結合起來$\nabla(\mu\nu) = (d\mu + [A_{Cl}, \mu])\nu + \mu(d\nu + [A_{Cl}, \nu]) = \nabla(\mu)\nu + \mu\nabla(\nu)$

4. 物理直覺

把 A 想像成一個「旋轉算子」。當你沿著流形移動時，Clifford 叢裡的元素μ和 v 會一起被這個算子「旋轉」。

萊布尼茲法則告訴我們：「先旋轉乘積」與「分別旋轉兩者再相乘」的結果是一樣的，這保證了幾何結構在平行移動下的穩定性。