§ Levi-Civita connection [GA4.3]

定理 4.3.1

任意黎曼流形存在唯一一個 Levi-Civita connsction ∇

(1) 是一個 metric connection： $X\langle Y,Z\rangle=\langle \nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle$

(2) Torsion free：$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$ for all vector fields X，Y。

定義 $\langle \nabla_X Y,Z\rangle=$書中的定義稱為 Koszul formula。通常在論證時直接用性質(1)(2)比較方便。

計算時 Levi-Civita connection 的定義簡化為兩個結構方程：

(1) $d\theta^i+\omega^i_j\wedge\theta^j=0$ (對應 torsion free)

(2) $\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$ 其中 $\omega_{ij}=g_{ik}\omega^k_j$ (對應度量相容)

在局部座標中(local chart) $\nabla_{\partial_i}\partial_j=\Gamma^k_{ij}\partial_k$ ，其中 $\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 。

且 $\nabla_{\partial_i}dx^j=-\Gamma^j_{ik}dx^k$ 也因此推出 $\Gamma^k_{ij}=\dfrac{1}{2}g^{kl}(g_{il,j}+g_{jl,i}-g_{ij,l})$

§ Riemannian curvature tensor

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

在局部坐標系中 $R(\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial x^j})\dfrac{\partial}{\partial x^l}=R^k_{lij}\dfrac{\partial}{\partial x^k}$

令 $R_{klij}:=g_{km}R^m_{lij}$ 則 $R_{klij}=\left\langle R(\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial x^j})\dfrac{\partial}{\partial x^l},\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle$

Lemma 4.3.1

對任意向量場 X、Y、Z

(1) R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z 即 $R_{klij}=-R_{klji}$

(2) R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0 即 $R_{klij}+R_{kijl}+R_{kjli}=0$ (first Bianchi identity)

(3) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle=-\langle R(X,Y)W,Z\rangle$ 即 $R_{klij}=-R_{lkij}$

(4) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle=\langle R(Z,W)X,Y\rangle$ 即 $R_{klij}=R_{ijkl}$

Lemma 4.3.2 Bianchi 第二恆等式

$$\nabla_{\partial_h}R_{klij}+\nabla_{\partial_k}R_{lhij}+\nabla_{\partial_l}R_{hkij}=0$$

§ 截曲率

黎曼流形上兩切向量 $X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}, Y=\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 所張平面的截曲率

$$K(X\wedge Y):=\langle R(X,Y)Y,X\rangle\frac{1}{|X\wedge Y|^2}$$

(若 $P\subset T_pM$ 是切空間中的一個二維平面投影，$K(P):=\frac{R(u,v,v,u)}{\|u\|^2\|v\|^2-\langle u,v\rangle^2}$)

應用

1. 比較定理
   (1) Rauch comparison theorem
   (2) Toponogov comparison theorem
2. Synge 定理
3. 截曲率是最強的二階幾何量。透過對截曲率進行取平均（跡運算），可以得到 Ricci 曲率：$Ric(v,v)=\sum_{i=1}^{n-1}K(v,e_i)$ 其中 $\{v,e_1,...,e_{n-1}\}$ 是正交規範基。
4. Schur 定理

§ 定義 $X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\in T_xM$ 方向的 Ricci curvature

$$Ric(X,X)=g^{jl}\left\langle R(X,\frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^l},X\right\rangle$$

Ricci tensor $R_{ij}=g^{kj}R_{ikjl}$ and scalar curvature $R=g^{ij}R_{ij}$

Definition 4.3.4 The Riemannian manifold M is called a space of constant sectional curvature, or a *space form* if $K(X\wedge Y)=K\equiv$ const. for all linearly independent $X,Y\in T_xM$ and all $x\in M$. A space form is called *spherical*, *flat*, or *hyperbolic*, depending on whether $K>0,=0,<0$.
M is called an *Einstein manifold* if

$$R_{ik}=cg_{ik},\quad c\equiv\text{ const.}$$

(note that c does not depend on the choice of local coordinates).

定理 4.3.2 Schur theorem

Let $d=\dim M\geq 3$。If the sectional curvature of M is constant at each point，i.e.

$K(X\wedge Y)=f(x)$ for $X,Y\in T_xM$ then f(x)≡const and M is a space form。

A space form is called spherical，flat，or hyperbolic，depending on whether K >0，=0，< 0

Likewise，if the Ricci curvature is constant at each point，i.e. $R_{ij} = c(x)g_{ij}$ then $c(x) \equiv$ const and M is Einstein。

Schu theorem says that the isotropy(各向同性) of a Riemannian manifold，i.e. the property that at each point all directions are geometrically indistinguishable，implies the homogeneity， i.e. that all points are geometrically indistinguishable。In particular，a pointwise property implies a global one。

定理 4.3.3 Weitzenbock formula

Theorem 4.3.3 (Weitzenböck Formula) *Let $e_1, \ldots, e_d$ ($d = \dim M$) be a local orthonormal frame field as in Lemma 4.3.4, with the dual coframe field $\eta^1, \ldots, \eta^d$. Then the Laplace–Beltrami operator acting on p-forms ($p = 0, 1, \ldots, d$) is given by*

$$\Delta = -\nabla^2_{e_i e_i} - \eta^i \wedge \iota(e_j) R(e_i, e_j). \tag{4.3.47}$$

定義 Hessian of a differential function

(M,g) is a Riemannian manifold， $f : M \to R$ is a differentiable function

The Hessian of f is ∇df

$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ then $\nabla df = (\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij}) dx^i dx^j$

Hessian 稱為黑塞矩陣 在 R^2 ， $H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$

1. $(Hessf)(X,Y) = g(\nabla_X(gradf), Y)$

$(Hessf)(X,Y) = (\nabla_X df)Y = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$

$$z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2 \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ detH>0 且 $f_{xx} = 2 > 0$ 所以 f(x,y)在(0,0)有極小值。

定義 凸(convex)函數

定理 4.3.4 Garding-Korn 不等式

Let M be a compact Riemannian manifold with metric tensor g。

There exists a constant c (depending on the geometry of M) such that for any (smooth) vector field X on M

$$\int_{\mathrm{M}}\|\nabla \mathrm{X}\|^{2} dVol+\int|divX|^{2} dVol \leq c(\int_{M}\|X\|^{2} dVol+\int_{M}\|L_{X} g\|^{2} dVol)$$

Where $L_X g$ is the Lie derivative of g in the direction of X。

這是一個典型的橢圓型估計，在證明解的存在性、唯一性、正則性時非常重要。

舉例解釋

球面 S^2 上有一個風場 X，表示空氣流動的方向與速度。

不等式的左邊：風場的「混亂程度」。

$\nabla \mathrm{X}$ (梯度)：代表風速在空間中變化的總量。

如果左邊數值很大，表示全球各地的風向或風速差異極大，氣流非常混亂。

divX(散度)：代表空氣的壓縮或膨脹。在地球大氣中，這通常與垂直氣流（升降氣流）有關。

不等式的右邊：控制變因

$\|\mathrm{X}\|^2$：這是風場整體的能量（風速的大小）。

$L_X g$：在黎曼幾何中，$L_X g$ 衡量的是當流體（風）沿著向量場 X 流動時，空間距離（度量 g）被拉伸或壓縮的程度。

如果 $L_X g = 0$，表示這個風場是等距的（稱為 Killing 向量場），就像一個旋轉的硬球，內部的點與點之間距離不變。

如果 $L_X g$ 很小，表示風雖然在吹，但沒有把大氣「撕裂」或過度「揉捏」。

如果大氣層的風既沒有失控（能量有限），也沒有在局部區域產生極端的拉扯（形變有限），那麼全球風場的變化率就不可能無限大。

[Poincare 不等式 AI001]

$$\int_{\Omega}\left|u-\bar{u}\right|^{2} dx \leq C\int_{\Omega}|\nabla u|^{2} dx$$

在某種意義上，您可以把 Gärding-Korn 看作是「帶有幾何約束的向量版 Poincaré 不等式」。如果一個向量場 X 完全不產生形變（$L_X g = 0$），那麼這

個不等式就退化成了討論該向量場本身能量與梯度之間的關係，這時它與 Poincaré 不等式的結構就幾乎一致了。

推論

Corollary 4.3.3 *Let M be a compact Riemannian manifold. Then the vector space of Killing fields (cf. Definition 2.3.7) on M is finite dimensional.*