§ Garding-Korn 不等式

Let M be a compact Riemannian manifold with metric tensor g。

There exists a constant c (depending on the geometry of M) such that for any (smooth) vector field X on M

$$\int_{M}\|\nabla X\|^{2}\,dVol+\int|divX|^{2}dVol\le c(\int_{M}\|X\|^{2}dVol+\int_{M}\|L_{X}g\|^{2}\,dVol)$$

Where $L_X g$ is the Lie derivative of g in the direction of X。

這是一個典型的橢圓型估計，在證明解的存在性、唯一性、正則性時非常重要。

舉例解釋

球面 S^2 上有一個風場 X，表示空氣流動的方向與速度。

不等式的左邊：測量風的變化

$\|X\|^2$：測量風速在空間中變化得有多快，例如風在赤道與中緯度之間的變化程度。

$|divX|^2$：測量風的「輻散」程度。

例如在低壓區風會往中心吹（負散度），在高壓區風會往外吹（正散度）。

左邊是這兩者的總和，代表風場的總變化量。

不等式的右邊：測量風的本身大小與對地形的影響。

$L_X g$：這是風場對地球表面度量的「拉伸」或「變形」。例如，如果風在某一區域吹得特別快，可能會「拉長」或「壓縮」地表上的距離感（雖然實際上地球不會變形，但這是數學上的描述）。右邊是風速本身與它對度量影響的總和。

總之，這是一個橢圓形估計，用於控制向量場的導數。

在幾何與物理中，這種估計是用來證明解的正則性與唯一性的基礎。

[Poincare 不等式 AI001]

$$\int_{\Omega}|u-\bar{u}|^{2}dx\le C\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}dx$$