

§ Laplace-Beltrami operator

在黎曼流形上，Laplace-Beltrami 算子(也稱為 Laplace-de Rham 算子)作用於 p-form 時，是一個二階微分算子  $\Delta = d\delta + \delta d$  [GA3.1-3Codifferential]

$$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d *$$

例 1  $R^n$  中  $g_{ij} = \delta_{ij}$  考慮一個最簡單的 p-form  $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  其中 f

是一個光滑函數，則  $\Delta\omega = -(\sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_s^2}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$

例  $S^2$  上

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \text{ 取一個 1-form } \omega = f(\theta)d\theta$$

經過一番繁複的計算 得  $\Delta\omega = -(\frac{d^2 f}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{df}{d\theta} - \frac{f}{\sin^2 \theta})d\theta$

Weitzenböck 公式

**Theorem 4.3.3 (Weitzenböck Formula)** *Let  $e_1, \dots, e_d$  ( $d = \dim M$ ) be a local orthonormal frame field as in Lemma 4.3.4, with the dual coframe field  $\eta^1, \dots, \eta^d$ . Then the Laplace–Beltrami operator acting on p-forms ( $p = 0, 1, \dots, d$ ) is given by*

$$\Delta = -\nabla_{e_i e_i}^2 - \eta^i \wedge \iota(e_j)R(e_i, e_j). \quad (4.3.47)$$

在黎曼幾何中 我們有兩種方式推廣 Laplace 算子

1. Laplace-Beltrami 算子  $\Delta = d\delta + \delta d$
2. Bochner Laplace 算子  $\nabla^* \nabla \omega = -\text{Tr}(\nabla^2 \omega)$

這兩個算子不一樣，Weitzenböck 公式說  $\Delta\omega = \nabla^* \nabla \omega + R(\omega)$

這裡  $R(\omega)$  是一個零階項，它是一個代數運算元，涉及到黎曼曲率張量作用在  $\omega$  上。

這個公式建立了分析（等號左邊的  $\Delta$  是微分算子，用來解 PDE，定義調和形式）和幾何（等號右邊的  $R$  是曲率張量，描述空間的彎曲程度）之間的橋樑。

Bochner 消沒(vanishing)定理：

對於一個 1-form  $\omega = \omega_i dx^i$  Weitzenböck 公式  $\Delta\omega = -(g^{kl} \nabla_k \nabla_l \omega_i) dx^i + Ric^j_i \omega_j dx^i$

或者寫成這樣  $(\Delta\omega)_i = -\nabla^k \nabla_k \omega_i + R_{ij} \omega^j$

1. 第一項  $-\nabla^k \nabla_k \omega_i$ ：就是 Bochner Laplace  $\nabla^* \nabla$ ，它對 1-form 的每個分量做兩

次協變導數然後取跡。如果是平坦的( $R^n$ )，它就退化為  $\sum \partial_j \partial_j \omega_i$ 。

2. 第二項  $R_j \omega^j$ ：這是里奇曲率作用在  $\omega$  上的結果。

Weitzenböck 公式告訴我們這個結果是怎麼拆解的：

1. 協變 Laplace 部分  $\nabla^* \nabla$ ：處理張量的導數。在球面上，對  $\omega = f(\theta) d\theta$  求協變 Laplace 會產生  $f''(\theta)$  項與  $\cot \theta f'(\theta)$  項。
2. 曲率項  $R(\omega)$ ：球面上里奇曲率張量  $R_{ij} = \frac{n-1}{r^2} g_{ij}$  作用在  $\omega$  上時，產生

$$-\frac{f}{\sin^2 \theta} \text{項。}$$

Weitzenböck Formula 的意思是：

幾何的 Laplace-Beltrami 算子  $\Delta$  作用在微分形式上，等於「分量的拉普拉斯」 $\nabla^* \nabla$  加上一個「曲率修正項」 $R$ 。

換句話說，它告訴我們流形的彎曲程度會直接影響函數（或形式）的振盪行為，這是現代幾何分析中許多深刻結果的起點。