§ de Rham cohomology [GA4.3.3]

$\alpha \in \Omega^p(M)$ is closed p-form if $d\alpha = 0$ ($\alpha \in \ker d$)；if $\exists \beta \in \Omega^{p-1}(M)$ such that $\alpha = d\beta$ then α is an exact p-form ($\alpha \in \operatorname{Im} d$)

$H_{dR}^p(M) := \dfrac{\ker d}{\operatorname{Im} d}$ (稱為 p-th de Rham cohomology group(space))。

Poincare lemma：

If M is contractible then $H_{dR}^p(M) \cong \begin{cases} R, p = 0 \\ 0, p \geq 1 \end{cases}$

de Rham cohomology theorem：

對於光滑流形 M，$H_{dR}^k(M) \cong H^k(M, R)$

也就是 deRham 上同調同構於流形的實係數奇異上同調群。

Hodge theorem：

M 是一個 compact 黎曼流形則每一個 $H^p(M)$ 中的上同調類恰有一個 harmonic form 與之對應。

每個 de Rham 上同調類可以唯一地表為一個調和形式（即同時閉且餘閉的形式，$\Delta\omega = 0$ ），從而 $H_{dR}^k(M) \cong H^k(M)$

其中 $H^k(M)$ 是調和 k-形式的空間。

($\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ 是兩個 closed form 若 $\alpha - \beta$ 是 exact form 稱兩者 cohomologous 這決定一個等價類)。

基本上有三種證法。

1. 變分法(p.144)
2. 算子分析法
3. Heat flow method

考慮 $\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = -\Delta\alpha \\ \alpha(0) = \alpha_0 \end{cases}$ 這裡 $\Delta = d\delta + \delta d$ 是 Hodge-Laplace 算子，$\alpha(t)$ 是隨時間演化的 differential form，解是 $\alpha(t) = e^{-t\Delta} \cdot \alpha_0$ ，$e^{-t\Delta}$ 稱為 heat kernel operator。

在 compact manifold 上，Δ的譜是離散且非負的

$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$

將 α_0 用 ϕ_n 展開，$\alpha_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n$ （ϕ_n 稱為 eigenform)則 $\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} \phi_n$

當 $\lambda_n > 0 \quad e^{-\lambda_n t} \to 0$ as $t \to \infty$

當 $\lambda_n = 0 \quad \cdots$

所以當 $t \to \infty$ 時，$\alpha(t)$ 收斂到 α_0 在 harmonic space $H^k(M)$ 的正交投影上，

$\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = H(\alpha_0)$

又，因為 $d\Delta = \Delta d$

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\alpha) = d\left(\frac{\partial}{\partial t}\alpha\right) = d(-\Delta\alpha) = -\Delta(d\alpha)$$

如果初始時 $d\alpha_0 = 0$ 則對所有 t，$d\alpha(t) = 0$ ，可進一步證明 $\alpha(t) - \alpha_0$ 在整個演化過程中都在同一個上同調類中進行。