§ Schur theorem

(M,g)是連通的黎曼流形，$n=\dim M\geq 3$，若對$\forall p\in M$ 其截面曲率$K(p,\sigma)$不依賴於平面$\sigma\subset T_pM$ ，

即存在一函數$k(p)$使得$K(p,\sigma)=k(p)$ ，則$k(x)\equiv$常數。

Jost 的書寫成這樣：

Let $n=\dim M\geq 3$。If the sectional curvature of M is constant at each point，
i.e. $K(X\wedge Y)=f(x)$ for $X,Y\in T_xM$ ，then $f\equiv$ const and M is a space form。
(a space form 意思是常截面曲率空間)
Likewise，if the Ricci curvature is constant at each point，i.e. $R_{ik}=c(x)g_{ik}$ ，then $c(x)\equiv$const and M is Einstein。

這是「局部的方向對稱性+$n\geq 3\Rightarrow$全域剛性(constant curvature)。
即 a pointwise property(曲率性質) implies a global one(幾何結構)。
同一點上所有方向曲率相同，不同點之間可以不同，但是$n\geq 3$時，Bianchi 恆等式會強迫這個函數不能變動，最後$\nabla k=0$ ，k 是常數。

1. 截面曲率

   對於一般的 Riemann 流形， $K(\sigma)=R(X,Y,\mathrm{Y},\mathrm{X})/|X\wedge Y|^2$

2. Isotropic(各向同性)$\Leftrightarrow R_{ijkl}=K(p)(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})$

   在黎曼幾何中，要精確地用黎曼曲率張量（Riemann Curvature Tensor）來定義「各向同性」（Isotropy），我們關注的是它在切空間中對不同方向的旋轉不變性。

   若一個流形在點 p 是各向同性的，這意味著曲率張量在 p 點必須具有高度的對稱性，也就是該點的曲率張量不依賴於切向量的方向。

   這個表達式之所以能夠捕捉「各向同性」，是因為它利用了度規張量作為「基礎單元」來構建曲率張量。

   - **旋轉不變性：** 在切空間中，若我們對切向量進行一個旋轉（即作用一個 $SO(n)$ 群的元素），度規張量 g 本身是旋轉不變的。因此，由 $g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}$ 所構成的組合，在旋轉下也是不變的。
   - **代數剛性：** 任何在 $SO(n)$ 下保持不變的 $(0,4)$ 張量，若滿足黎曼曲率張量的代數性質（如反對稱性、第一 Bianchi 恆等式），必然可以寫成這種線性組合的形式。這體現了空間幾何的極致對稱。

3. Differential Bianchi identity： $\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0$

證明 [https://www.youtube.com/watch?v=m_LefZ04dak]

Differential Bianchi identity： $\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0$

乘以 $g^{ik} g^{jl}$ 進行縮並

$$g^{ik} g^{jl} [\nabla_m K (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) + \ldots] = 0$$

$$\nabla_m K (\delta_i^i \delta_j^j - \delta_l^k \delta_k^l) + \nabla_k K (\delta_l^k \delta_m^l - \delta_m^k \delta_j^j) + \nabla_l K (\delta_m^k \delta_k^l - \delta_i^i \delta_m^l) = 0$$

$$\nabla_m K (n^2 - n) + \nabla_k K (\delta_m^k - n\delta_m^k) + \nabla_l K (\delta_m^l - n\delta_m^l) = 0$$

$$\nabla_m K (n^2 - n) + \nabla_m K - n\nabla_m K + \nabla_m K - n\nabla_m K = 0$$

$$\nabla_m K (n^2 - 3n + 2) = 0, \nabla_m K (n-1)(n-2) = 0$$

所以 $\nabla_m K = 0$