

§ 4.2 Metric Connection and Yang-Mills functional

定義 4.2.1

E 是微分流形 M 上的 vector bundle。

A connection D on E is called metric if $d\langle \mu, \nu \rangle = \langle D\mu, \nu \rangle + \langle \mu, D\nu \rangle$ for all $\mu, \nu \in \Gamma(E)$

這是 $\nabla g = 0$ 的嚴格定義，就是 connection 與 metric 相容的意思。
之前寫成這樣：

∇ is metric compatible : $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ for all X, Y, Z 。

Let $c: I \rightarrow M$ be a smooth curve, and let $\mu(t)$ and $\nu(t)$ be parallel along c , i.e.

$$D_X \mu = 0 = D_X \nu, \quad X = \dot{c} = \frac{dc}{dt}, \quad X \langle \mu, \nu \rangle = \langle D_X \mu, \nu \rangle + \langle \mu, D_X \nu \rangle = 0$$

即 $\frac{d}{dt} \langle \mu(t), \nu(t) \rangle = 0$ ，保持內積(不變)。

Lemma 4.2.1

The parallel transport induced by a metric connection on a vector bundle preserves the bundle metric in the sense that the parallel constitutes an isomerty of the corresponding fibers。

如果一個向量叢上的 connection 是 metric connection (滿足 $\nabla g = 0$)，

$\frac{d}{dt} \langle \mu(t), \nu(t) \rangle = 0$ 表示它產生的平行移動就會保持內積不變。

也就是說，不同纖維之間的平行移動是等距同構。

在黎曼幾何中，Levi-Civita connection 是唯一 metric +torsion-free，平行移動一定是等距同構。

設 $E \rightarrow M$ 是 vector bundle

取一個 local trivialization(or equivalently a local fram) $\{e_1, \dots, e_n\}$ ，那麼任意截面 σ

可以寫成 $s = \sum_i s^i e_i$ 。

由 Leibniz 法則 $Ds = \sum_i (ds^i) e_i + \sum_i s^i D e_i$

$\because D e_i$ 是 bundle value 1-form, $\therefore D e_i = \sum_j A_{ji} e_j$ 其中 $A = (A_{ji})$ 為 connection 1-form

$$Ds = ds + As$$

例 二維球面 S^2 在標準度量下的 Levi-Civita 聯絡如何具體寫成 $D = d + A$ 的形式。

$$S^2 \text{ 上, } g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \text{ 正交基 } \{e_1, e_2\} \quad e_1 = \frac{\partial}{\partial \theta}, e_2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

D 是 S^2 上的 Levi-Civita connection, 向量場 $X = \sigma^1 e_1 + \sigma^2 e_2$ 則

$$DX = D \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\sigma^1 \\ d\sigma^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta d\phi \\ \cos \theta d\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{其中 } \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta d\phi \\ \cos \theta d\phi & 0 \end{pmatrix} = A$$

因此一個 metric connection 可以如是分解：

Let D be a metric connection on the vector bundle with bundle metric $\langle \cdot, \cdot \rangle$, w.r.t. a metric chart we have $D = d + A$

Lemma 4.2.2

Let D be a metric connection on the vector bundle E with bundle metric $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Assume that w.r.t. a metric bundle chart we have the decomposition $D = d + A$, then for any

$X \in TM$, the matrix $A(X)$ is skew symmetric, i.e. $A(X) \in \mathfrak{o}(n)$ (即 $A^T = -A$).

推論 4.2.1

Let $D = d + A$ be a metric connection on E .

Then the curvature F of D satisfies $F \in \Omega^2(AdE)$

$$\text{Let } A = A_j dx^j \text{ then } F = \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} + A_i A_j \right) dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + [A_i, A_j] \right) dx^i \wedge dx^j$$

$$F : \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^2(E)$$

$$\mu \rightarrow R(\cdot, \cdot)\mu$$

$$\text{從 } A = A_j dx^j, F = dA + A \wedge A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + [A_i, A_j] \right) dx^i \wedge dx^j \text{ 推到 } R_{ijk}^l$$

定義 4.2.2

Let M be a compact, oriented Riemannian manifold, E a vector bundle with a bundle metric over M , D a metric connection on E with curvature $F_D \in \Omega^2(AdE)$.

The Yang-Mills functional applied to D is $YM(D) := (F_D, F_D) = \int_M \langle F_D, F_D \rangle * (1)$

曲率的變分

考慮聯絡的微小擾動 $A_t = A + t\alpha$, 其中 α 是取值於李代數的 1-形式。

曲率變化: $F_{A+t\alpha} = F_A + t \cdot d_A \alpha + O(t^2)$

$$\begin{aligned} F_{A_t} &= F_{A+t\alpha} = d(A+t\alpha) + (A+t\alpha) \wedge (A+t\alpha) \\ &= dA + t d\alpha + A \wedge A + (A \wedge \alpha + \alpha \wedge A) + t^2 (\alpha \wedge \alpha) \\ &= F_A + t(d\alpha + [A, \alpha]) + O(t^2) \end{aligned}$$

定義協變外微分: $d_A \alpha = d\alpha + [A, \alpha]$

註 對 p -form ω , q -form η , $[\omega, \eta] = \omega \wedge \eta - (-1)^p \eta \wedge \omega$ 所以

$$[A, \alpha] = A \wedge \alpha - (-1)\alpha \wedge A = A \wedge \alpha + \alpha \wedge A$$

驗證 $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F_{A_t} = d_A \alpha$

$$\begin{aligned} F_{A+t\alpha} &= d(A+t\alpha) + (A+t\alpha) \wedge (A+t\alpha) \\ F_{A_t} = dA_t + A_t \wedge A_t \text{ 則} &= dA + A \wedge A + t(d\alpha + [A, \alpha]) + o(t^2) \\ &= F_A + t d_A \alpha + o(t^2) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F_{A_t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_{A+t\alpha} - F_A}{t} = d_A \alpha$$

Euler-Lagrange 方程推導

$$\begin{aligned} \delta S(A) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{1}{2} \int_M \langle F_{A_t}, F_{A_t} \rangle dV_g = \int_M \left\langle \left. \frac{d}{dt} F_{A_t}, F_{A_t} \right\rangle dV_g \\ &= \int_M \langle d_A \alpha, F_A \rangle dV_g = \int_M \langle \alpha, d_A^* F_A \rangle dV_g \end{aligned}$$

註 d_A^* 是 d_A 的 adjoint operator, $d_A^* = (-1)^{n(k-1)+1} * d *$

伴隨算子 d_A^* 要滿足 $\int_M \langle d_A \alpha, \beta \rangle_{L^2} = \int_M \langle \alpha, d_A^* \beta \rangle_{L^2}$

根據變分原理, 若 A 是臨界點, 則對於所有測試形式 α , $\delta S(A) = 0 \Rightarrow d_A^* F_A = 0$

這就是 Yang-Mills 方程。

D is a critical point of the Yang-Mills functional iff $D^*F_D = 0$ 。

定義 4.2.3

A metric connection D on the vector bundle E with a bundle metric over the oriented Riemannian manifold M is called a Yang-Mills connection if $D^*F_D = 0$ 。

主纖維叢觀點與物理對應

考慮一個主 G -叢，並在其上定義一個連絡 A （在物理中稱為規範勢），其曲率

F_A （在物理中稱為場強）。

場強即曲率：幾何上的彎曲程度對應物理上的力。

能量即作用量： $YM(A)$ 對應物理系統的總能量或作用量。

非線性即交互作用

交互作用	規範群	規範粒子
電磁力	U(1)	光子(photon)
弱交互作用	SU(2)	W 與 Z 玻色子
強交互作用	SU(3)	膠子(gluon)

定義 4.2.4

A gauge transformation is a section of $\text{Aut}(E)$ 。

The group G of gauge transformations is called the gauge group of the metric bundle E 。

例 SU(2)中 $\psi(x) \rightarrow g(x)\psi(x)$ ， $g(x)$ 就是所謂 $\text{Aut}(E)$ 的截面。

為了讓物理定律在這種局部變換下保持不變，我們必須引入聯絡，也就是規範場 A_μ 。

對於 SU(2)，規範場是取值於 Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ 的向量場： $A_\mu = A_\mu^v \sigma_v$ ，其中 σ_v 是

Pauli matrices、

當我們進行規範變換時，規範場依下列方式進行 $A_\mu \rightarrow gA_\mu g^{-1} + (\partial_\mu g)g^{-1}$

書上這麼說：

$s \in G$ 透過這種方式 $s^*(D) := s^{-1} \circ D \circ s$ 作用在 metric connection D 上，i.e.

$$s^*(D)\mu = s^{-1}D(s\mu) \text{ for } \mu \in \Gamma(E)$$

(先對場 (section μ) 進行一個 s 變換，應用 connection D 進行微分，最後再用 s^{-1} 拉回原來的框架。)

$$\text{For } D=d+A, \quad s^*(A) = s^{-1}ds + s^{-1}As$$

在 $SU(2)$ 中， $s(x)$ 是一個 2×2 的么正矩陣， $s^{-1}As$ 代表聯絡在伴隨表示下的旋轉， $s^{-1}ds$ 則是座標變換產生的幾何修正。

$$\text{這變換確保了 } F_{s^*D} = s^{-1}F_D s$$

Lemma 4.2.3

Let D be a connection on the vector bundle E over M . For any $x_0 \in M$, there exists a gauge transformation s defined on some neighborhood of x_0 such that the gauge

transformed connection $s^*(D)$ satisfies $s^*(D) = d$ at x_0 .

Of course, the gauge transformation can always be chosen to be compatible with any structure preserved by D , in particular a metric.

$$D=d+A, \quad s^*(D) = d + s^*(A) \quad s^*(D)\mu = s^{-1}D(s\mu)$$

先計算 $D(s\mu)$

$$D(s\mu) = (d+A)(s\mu) = d(s\mu) + As\mu = (ds)\mu + s(d\mu) + As\mu$$

$$s^{-1}(D(s\mu)) = s^{-1}((ds)\mu + s(d\mu) + As\mu) = s^{-1}(ds)\mu + d\mu + (s^{-1}As)\mu$$

左式 = $(d + s^*(A))\mu$ ，兩邊消去 $d\mu$

$$\text{所以 } s^*(A) = s^{-1}ds + s^{-1}As$$

$$YM(D) := (F_D, F_D) = \int_M \langle F_D, F_D \rangle * (1)$$

$\langle s^*F, s^*F \rangle = \langle F, F \rangle$ 就是 YM functional 在規範變換下不變。

$$\langle F, F \rangle = \int_M \text{Tr}(F \wedge *F), \quad s^*F = s^{-1}Fs$$

$$(s^{-1}Fs) \wedge *(s^{-1}Fs) = s^{-1}Fs \wedge s^{-1}(*F)s = s^{-1}(F \wedge *F)s$$

$$\text{Tr}(s^*F \wedge *(s^*F)) = \text{Tr}(s^{-1}(F \wedge *F)s) = \text{Tr}(F \wedge *F)$$

所以 $\langle s^*F, s^*F \rangle = \langle F, F \rangle$

§ 規範變換與不變性

規範群 G 的元素 g 作用在截面上 $s \rightarrow g \cdot s$ 。

為保持協變導數的相容性，聯絡變換規則為： $A \rightarrow g^*(A) = g^{-1}dg + g^{-1}Ag$

相應地 $F_A \rightarrow g^{-1}F_Ag$

先確認李群或矩陣中， $d(g^{-1}) = -g^{-1}(dg)g^{-1}$

$$g \cdot g^{-1} = I, \quad d(g \cdot g^{-1}) = (dg) \cdot g^{-1} + g \cdot d(g^{-1}) = d(I) = 0$$

$$g \cdot d(g^{-1}) = -(dg) \cdot g^{-1} \quad \text{所以 } d(g^{-1}) = -g^{-1}(dg)g^{-1}$$

設 $A' = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ 欲證 $F_{A'} = g^{-1}F_Ag$

$$\begin{aligned} dA' &= d(g^{-1}Ag + g^{-1}dg) = d(g^{-1}Ag) + d(g^{-1}dg) \\ &= (dg^{-1}Ag + g^{-1}dAg - g^{-1}A \wedge dg) + (dg^{-1} \wedge dg + g^{-1}d^2g) \end{aligned}$$

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (d\eta)$$

這裡 g, g^{-1} 是 0-form， A 是 1-form

$$d(g^{-1}Ag) = d(g^{-1}) \wedge Ag + (-1)^0 g^{-1}d(Ag) \quad d(Ag) = dA \cdot g - A \wedge dg$$

所以 $d(g^{-1}Ag) = d(g^{-1}) \wedge Ag + g^{-1}(dA)g - g^{-1}A \wedge dg$

$$dA' = -g^{-1}dgg^{-1} \wedge Ag + g^{-1}dAg - g^{-1}A \wedge dg - g^{-1}dgg^{-1} \wedge dg$$

$$A' \wedge A' = \dots$$

$$F_{A'} = dA' + A' \wedge A' = \dots = g^{-1}F_Ag$$

定理 4.2.1 (關於不變性)

The Yang-Mills functional is invariant under the operator of the gauge group G 。

： $YM(g^*A) = YM(A)$ 。因此，若 A 是 Yang-Mills connection，則 g^*A 也是。

等價性：如果 D 是一個 Yang-Mills 連通（即物理場的一組組態），那麼透過規範群轉換後得到的 s^*D 在物理上與 D 是完全等價的。

守恆律：根據諾特定理（Noether's Theorem），這種連續對稱性對應著某種守恆荷（例如電荷或色荷）。

這引出了一個關鍵的數學挑戰：

既然 D 與 s^*D 物理上相同，我們就不應該分別計算它們。

數學家會將所有的 Yang-Mills 連通集合除以規範群 G 的作用，得到的商空間稱為模空間（Moduli Space）。

這個空間的幾何結構（例如其維度、拓撲性質）正是幾何分析與奇異點理論研究的核心，也是 Atiyah-Singer 指標定理等工具發揮作用之處。

Yang-Mills 理論是 Hodge 理論的推廣

1. 從線性到非線性的推廣

在經典 Hodge 理論中，我們關注的是 Abelian gauge group，例如 $U(1)$ ，此時 connection A 是線性的，其曲率 $F_A = dA$ 。

Hodge 理論的核心是尋找 harmonic forms。

Yang-Mills 理論則把這概念推廣到 non-Abelian gauge group，例如 $SU(2)$ ，此時 connection A 是非線性的，其曲率 $F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$

Yang-Mills 方程 $d_A * F_A = 0$ 正是調和形式方程在非線性背景下的直接對應。

因為有 second Bianchi identity $dF=0$ ，所以 F is harmonic iff D 是 Yang-Mills connection ($d^*F = 0$)。

2. 泛函極小化的視角

Hodge 理論：在一個 de Rham cohomology class 中，harmonic form 使得 L^2 能量泛函 $E(\omega) = \int_M |\omega|^2 dV$ 達到最小的元素。

Yang-Mills 理論：在 connection 的空間中，Yang-Mills connection 是使得 YM functional $YM(A) = \int_M |F_A|^2 dV$ 達到臨界點的 connection。

推論 4.2.3

The space of Yang-Mills connections on a given metric vector bundle E of rank ≥ 2 is infinite dimensional, unless empty。

定義 4.2.5

A connection D on a vector bundle over an oriented four-dimensional Riemannian manifold is called (anti)selfdual or an (anti)instanton if its curvature F_D is an (anti)selfdual 2-form.

§ 自對偶性與瞬子 (四維流形)

Hodge star 算子 $*$ 把一個 k -form 映射成 $n-k$ form, $n=4$ 時, 對於一個 2-form

$*\Lambda^2(M) \rightarrow \Lambda^2(M)$ 是一個 linear transformation, 在 4 維流形上 $*^2 = (-1)^{2(4-2)} = 1$ 這意味著 $*$ 的 eigenvalue = ± 1 , 因此, 2-form 的向量叢可分解為兩個特徵子空間的直和: $\Lambda^2(M) = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$

Λ^+ (selfdual): 對應特徵值為+1 的空間。 $*F_A = F_A$

Λ^- (anti-selfdual): 對應特徵值為-1 的空間。 $*F_A = -F_A$

根據 Bianchi 恆等式, 任何 connection 的曲率都滿足 $d_A F_A = 0$

若 $*F_A = F_A$ 則 $d_A(*F_A) = d_A F_A = 0$, F_A 是 YM 方程的解。

$*F_A = -F_A$ 則稱為 anti-selfdual。滿足 $*F_A = \pm F_A$ 的聯絡稱為瞬子。

定理 4.2.2

Each (anti)selfdual metric connection is a solution of Yang-Mills equation.

The Yang-Mills equation is $D^*F = 0$ (equivalent to $D*F = 0$)

§ 不變多項式

在 Lie algebra 上的多項式 P , 若滿足 $P(gXg^{-1}) = P(X)$ 就稱為不變多項式。

例如 $\text{Tr}(X)$, $\text{Det}(X)$ 。

在向量叢/主叢上:

Connection ω curvature Ω 或 F

$F \rightarrow gFg^{-1}$ 曲率做共軛變換, $P(F)$ 不變, 所以 $P(F)$ 是全域定義的。

Chern-Weil 三個性質:

(1) 次數 $P(F) \in \Omega^{2k}(M)$

(2) 閉性 $dP(F)=0$

(3) 與 connection 無關(只依賴 bundle) $[P(F)] \in H^{2k}(M)$

Chern class 的來源：

特徵多項式 $P(X) = \det(I + \frac{i}{2\pi} X)$ ，展開後 $= 1 + c_1 + c_2 + \dots$ 每一項就是 $c_k(E)$ 。

具體公式

$$c_1(E) := [\frac{i}{2\pi} \text{Tr}(\Omega)] \in H_{dR}^2(M, \mathbb{R})$$

$$c_2(E) = [\frac{1}{8\pi^2} (\text{Tr}(F)^2 - \text{Tr}(F^2))] \in H_{dR}^4(M, \mathbb{R})$$

U(2)的例子

Lie algebra $\mathfrak{u}(2)$ = skew-Hermitian matrices

不變多項式生成元基本上就是 $\text{Tr}(X)$ ， $\text{Tr}(X^2)$ (等價於 $\det(X)$)

對應 Chern class 令 $A = \frac{i}{2\pi} F$ 則總陳類 $c(E) = \det(I + A)$

展開 $c_1 = \text{Tr}(A)$, $c_2 = \det(A)$

在幾何分析中

1. Spectral geometry：heat kernel 展開會出現 $\text{Tr}(F^2)$ ，scalar curvature 都是不變量。
2. Index theorem：Chern character，Todd class 都來自 Chern-Weil。
3. Yang-Mills：action $\|F\|^2$ 本質也是規範不變量。

推論 4.2.4

For an invariant polynomial of degree k ，we have $dP(F)=0$ 。

Consequently， $P(F)$ defines a cohomology class $[P(F)] \in H^{2k}(M)$ ，and this class does not depend on the chosen connection。

不變多項式的定義：

設 \mathfrak{g} 是群 G 的 Lie algebra。一個 k 階不變多項式 $P: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ 是一個多重線性對稱映射，且在伴隨表示(adjoint representation)下是不變的。

對於任意 $X_i \in \mathfrak{g}$ 與 $A \in \mathfrak{g}$ ，滿足 $\sum_{i=1}^k P(X_1, \dots, [A, X_i], \dots, X_k) = 0$

應用到曲率 2-form F 時記作 $P(F)=P(F, \dots, F)=0$ 。

由 Leibniz 法則， $dP(F, \dots, F) = \sum_{i=1}^k P(F, \dots, dF, \dots, F) = kP(dF, F, \dots, F)$

根據第二 Bianchi 恆等式 $DF = dF + [\omega, F] = 0$ $dF = -[\omega, F]$

$dP(F) = kP(-[\omega, F], F, \dots, F)$

由於對於任何 $A \in \eta$ (Lie algebra)：

$\sum_{i=1}^k P(F, \dots, [A, F], \dots, F) = 0$ 令 $A = \omega$ ，由於所有輸入位元都是相同的 F ，上述總

和即為 $k \cdot P([\omega, F], F, \dots, F) = 0$

因此 $dP(F) = -k \cdot P([\omega, F], F, \dots, F) = 0$

這項證明通常被稱為 Chern-Weil 理論的基礎引理。

定義 4.2.6

The Chern classes of E are defined as $c_j(E) = [P^j(\frac{i}{2\pi} F)] \in H^{2j}(M)$ ，where P^j is the

j^{th} elementary symmetric polynomial，and F is the curvature of an arbitrary connection on E 。

$$YM(D) = \int_M |F|^2 dV = \int_M (|F^+|^2 + |F^-|^2) dV$$

$$\text{拓撲荷 (topological charge)} k = \int_M c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(F \wedge F)$$

其中 $c_2(E)$ 是第二 Chern class。

$$\text{利用 Hodge 星算子，在四維情況下，} \int_M \text{Tr}(F \wedge F) = \int_M (|F^+|^2 - |F^-|^2) dV$$

$$8\pi^2 k = \int_M (|F^+|^2 - |F^-|^2) dV$$

$YM(D) = 8\pi^2 k + 2 \int_M |F^-|^2 dV \geq 8\pi^2 k$ 。當 $k > 0$ ，能量的下限由 k 決定， $F^- = 0$ (即 $F = *F$) 時達到這個下界。

§ 定理 4.2.3

Let E be an $SU(m)$ vector bundle over the compact oriented four-dimensional manifold M 。Then an $SU(m)$ connection D on E yields an absolute minimum for YM if F is antiselfdual or selfdual (depending on the sign $c_2(E)[M]$)，i.e. if it satisfies the first order equation $F = \pm *F$ 。

定理 4.2.3 指出，拓撲荷為 Yang-Mills 作用量提供了一個由流形和叢的拓撲結構所決定的「能量下限」。

滿足 $F = \pm *F$ 的場（即瞬子）正是那些將場論的動力學能量降至拓撲極限的最優配置。

例 DPST 瞬子

是四維歐幾里得空間（或 S^4 流形）中 Yang-Mills 方程的第一個非平凡經典解(定理 4.2.3 中 topological charge $k=1$ 的實例)，1975 年由四位蘇聯物理學家所發現的。

對於 $SU(2)$ 規範群，DPST 瞬子的聯絡(規範勢)通常表示為

$$A_\mu(x) = \text{Im}\left(\frac{x^2}{x^2 + \rho^2} g^{-1} \partial_\mu g\right)$$

直觀類比：在一個地形起伏的山谷中尋找最低點

- (1) 一般的 D，像是山坡上任一點，隨時可能往下滑。
 - (2) Yang-Mills 解：像是山谷的底部或鞍點。
 - (3) 自對偶解：這不只是山谷底部，它更像是被地形(拓撲)所限制住的最深處。
- 瞬子是在給定拓撲荷下，能量最精簡的狀態。

這個定理顯示在 4 維流形上，YM 泛函的特性。

定義 4.2.7

在 3 維流形的 Chern-Simons functional of A ：
$$CS(A) = \int_M \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

$A \wedge dA$ 與 Abelian 情況下的螺旋度(helicity)類似，描述場線的纏繞。

邊界關係：

想像 4-dim W ， $\partial W = M$ ，如果在 W 上定義一個 curvature form $F = dA + A \wedge A$

則(根據 Chern-Weil theory)
$$\int_W \text{tr}(F \wedge F) = \int_M CS(A)$$

臨界點：

即 Chern-Simons functional 可以看作是特徵類(如第二陳類)在邊界的降維表現。

Chern-Simons functional 的 Euler-Lagrange 方程（即變分臨界點）恰好是 $F=0$ 。

這意味著該泛函的臨界點對應於流形上的平坦聯絡，與低維拓撲中的基礎群表示論直接掛鉤。

實例： $SU(2)$ 規範群與 Donaldson 理論

$SU(2)$ 場強分解

Donaldson 定理與四維流形

在四維流形上研究 $SU(2)$ 瞬子模空間 (Moduli Space)，可推導出微分拓撲的深刻結論：

- (1) 交截形式：若單連通四維流形具有正定交截形式，則該形式必可對角化為單位矩陣。
- (2) 意義：揭示了四維空間中，拓撲結構與微分結構之間的巨大差異（存在拓撲流形無法賦予光滑結構）。

§ 08 相關猜想與延伸

Yang-Mills 質量間隙問題：

廣義相對論的正質量問題：

(1) R.Schoen Yau 用 minimal surface

(2) E.Witten 用 spin geometry+Dirac operator $D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{1}{4} R$

ADM mass 的精確定義 \Rightarrow Witten 證明 \Rightarrow Lichnerowicz formula \Rightarrow Yamabe problem, scalar curvature rigidity

附錄

§1 Yang-Mills 方程 $d_A^* F_A = 0$

考慮 principal bundle 上的 Lie group 例 $SU(3)$

connection 1-form A

curvature 2-form $F = dA + A \wedge A$

$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ 其中 g 是耦合常數， f^{abc} 是結構常數。

Lagrange 密度 $L_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$

場方程：無物質源時，Yang-Mills 方程為 $D^\mu F_{\mu\nu}^a = 0, D^\mu = \partial^\mu + gf^{abc} A^{b\mu}$

§2 $SU(2)$ 在 Yang-Mills 理論 [LieGroup103SU(2)]

一. 規範對稱性與場強張量

(1) Gauge potential : connection A 可以寫成 $A_\mu = A_\mu^a J_a$, $J_i = \frac{\sigma_i}{2}$, σ_i 是 Pauli 矩陣。

(2) Field strength : $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$ 利用 $[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c$, 分量形式

$$\text{變成 } F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

二. 弱交互作用

在粒子物理的標準模型中，弱交互作用就是一種 SU(2) 規範理論。

三. 瞬子與拓撲性質

從幾何與拓撲的角度來看，SU(2) 在 Yang-Mills 理論中有極其優美的結構。

(1) Chern-Simons forms

(2) Instantons

(3) 拓撲荷

四. 自對偶方程與幾何分析

在四維黎曼流形上，SU(2) Yang-Mills 作用量的極小值點出現在 Self-dual 或 anti-self-dual 方程的解： $F = \pm *F$ ，這在數學上引發了 Donaldson 理論。利用 SU(2) 聯絡的模空間 (Moduli Space)，數學家得以區分四維流形的不同微分結構。這正是物理上的規範場論對現代幾何學產生的深遠影響。

§ Perspectives

$$\Gamma: H^2(M) \times H^2(M) \rightarrow R$$

1. 核心概念：交截形式 (intersection form) : $(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge \beta$

2. Donaldson 定理

若 M 是單連通且其交截形式為正定(definite)，則在 $H^2(M)$ 的適當的基底
下，其交截形式 Γ 可以用 \pm 單位矩陣來表示。

微分拓撲的限制：根據 M. Freedman 的研究，存在一些單連通的拓撲四維流形，其交截形式並非單位矩陣。

Donaldson 的發現證明了這類流形無法承載微分結構，揭示了四維空間中拓撲與微分結構之間的顯著差異。

3. 證明的核心工具：模空間(Moduli space) of instantons on a vector bundle over M with structure group $SU(2)$ and with topological charge $\frac{-1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(F \wedge F) = 1$ for the curvature F of a $SU(2)$ -connection。
4. 理論基礎與後續發展
 - (1) 分析基礎：Donaldson 的證明依賴於 Taubes 關於自對偶連接存在性的研究，以及 Uhlenbeck 關於（抗）自對偶連接分析性質的工作。
 - (2) Donaldson 多項式：Donaldson 後續利用這些模空間的幾何與拓撲定義了新不變量（Donaldson Polynomials），極大地增進了對四維微分流形的理解。
 - (3) 簡化路徑：隨後發現了一種更簡潔的方法（即第 11 章將討論的內容），該方法基於旋量叢截面與輔助叢連接的耦合方程，涉及 $U(1)$ 阿貝爾規範群。