§ Chern-Simons functioal

三維流形 M 上，給定一個主纖維叢。

D=d+A， $A \in \Omega^1(\wp)$ ， $\wp$是 Lie algebra，D 是一個 G-connection， $E \cong M \times R^n$ is a trivial G-bundle。

定義 M 上的 Chern-Simons functional of A： $CS(A) = \int_M tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$

其中 $A \wedge dA$是 Abelian 項， $\frac{2}{3} A \wedge A \wedge A$是 nonAbelian 修正項，

$A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A$稱為 Chern-Simons 3-form

(1) 計算 CS 的 Euler-Lagrange equation

$\delta CS(A) = 0 \Leftrightarrow F_A = 0$ 稱為平坦聯絡(flat connection)　　附錄(1)

(2) 在四維空間 W， $k = \int_W c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2} \int_W tr(F \wedge F)$ 稱為 topological charge

根據廣義的 Stokes 定理$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$

若此流形有三維邊界$M = \partial W$ ，則$\int_{\mathrm{W}} tr(F \wedge F) = \int_M tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$

即 CS(A)是高維拓撲量的「邊界表現」。

假設$tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) = \omega$

則我們要證明$d\omega = tr(F \wedge \mathrm{F})$　　附錄(2)

定理 4.2.3

當曲率 F 滿足一階方程$F = \pm * F$時，該 connection D 能讓 Yang-Mills 泛函(能量)達到絕對最小值。

拓撲荷為 Yang-Mills 作用量提供了一個由流形和叢的拓撲結構所決定的「能量下限」。

$$YM(D) = \int_M |F|^2 dV = \int_M (|F^+|^2 + |F^-|^2) dV \cdots (1)$$

$$k = \int_M c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M tr(F \wedge F) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M (|F^+|^2 - |F^-|^2) dV \cdots (2)$$

$\Rightarrow YM(D) = 8\pi^2 k + 2\int_M |F^-|^2 dV \geq 8\pi^2 k$ (稱為 Bogomolnyi bound)

滿足$F = \pm * F$的場（即瞬子）正是那些將場論的動力學能量降至拓撲極限的最優配置。

原文是這麼說的：
Let E be an SU(m) vector bundle (複向量叢)over the compact oriented four-dimensional manifold M(例如 S^4)，then an SU(m) connection D (物理上就是 gauge potential A) on E yields an absolute minimum for YM if F(物理上即規範場強 $F_{\mu\nu}$) is antiselfdual or selfdual (depending on the sign $c_2(E)[M]$)，i.e. if it satisfies the first order equation $F = \pm * F$ 。
在四維空間中，想在某個具有特定拓撲荷的向量叢上找能量最低 最穩定的 Yang-Mills 規範場(即真空或孤子解)，只需解 $F = \pm * F$ 。

定理 4.2.2
Each (anti)selfdual metric connection is a solution of Yang-Mills equation $D^* F = 0$
(即 $D * F = 0$ 其中 $D^* = (-1)^{n(p+1)+1} * D *$)
所謂 BPS 方程(Bogomolny-Prasad-Sommerfield 方程 一組一階 PDE)，例如 selfdual Yang-Mills 方程 $F = \pm * F$ 。

(3) 比較

	Yang-Mills 泛函	Chern-Simons 泛函
定義維度	4	3
依賴度量	O	X
積分對象	$tr(F \wedge *F)$	$tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$
運動方程	$D_A^* F_A = 0$	$F_A = 0$（平坦聯絡）
物理意義	規範玻色子的動力學	拓撲場論
數學意義	即小子流形、瞬子模空間	平坦聯絡空間、扭結不變量

附錄

(1) 計算 $\frac{d}{dt} CS(A + tB)\big|_{t=0} =$

其中 $CS(A) = \int_M tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$

$$(A + tB) \wedge d(A + tB) = (A + tB) \wedge (dA + tdB) = A \wedge dA + tA \wedge dB + tBdA + t^2 B \wedge dB$$

$$\frac{d}{dt}(A \wedge dA + tA \wedge dB + tB \wedge dA + t^2 B \wedge dB)\big|_{t=0} = A \wedge dB + B \wedge dA$$

由(*) $\frac{d}{dt} tr(A + tB) \wedge (A + tB) \wedge (A + tB) = 3tr((\frac{d}{dt}(A + tB)) \wedge (A + tB) \wedge (A + tB))$

$= 3tr(B \wedge A \wedge A)$ as $t \to 0$

所以

$$\frac{d}{dt}CS(A+tB)\big|_{t=0}=\int tr(A\wedge dB+B\wedge dA+2B\wedge A\wedge A)=2\int tr(B\wedge dA+B\wedge A\wedge A)$$

$=2\int tr(B\wedge(dA+A\wedge A)=2\int tr(B\wedge F)=0$ for any B 所以 F=0

(這裡面 $\int tr(A\wedge dB)=\int tr(B\wedge dA)$ 還有點問題)

(2) $d(tr(A\wedge dA)=tr[d(A\wedge dA)]$

A is a 1-form，$\therefore d(A\wedge dA)=dA\wedge dA-A\wedge d^2A=dA\wedge dA$

$d(tr(A\wedge A\wedge A)=tr(dA\wedge A\wedge A-A\wedge dA\wedge A+A\wedge A\wedge dA)=3tr(dA\wedge A\wedge A)$ …(*)

$F=dA+A\wedge A$

$tr(F\wedge F)=tr((\mathrm{dA}+\mathrm{A}\wedge\mathrm{A})\wedge(\mathrm{dA}+\mathrm{A}\wedge\mathrm{A}))$

$=\mathrm{tr}(\mathrm{dA}\wedge\mathrm{dA})+\mathrm{tr}(\mathrm{dA}\wedge\mathrm{A}^2)+tr(A^2\wedge dA)+tr(A^4)$ 其中 $A^4=0$，

$tr(dA\wedge A^2)=tr(A^2\wedge dA)$

$=tr(dA\wedge dA)+2tr(dA\wedge A\wedge A)$

$$d\omega=d[tr(A\wedge dA)+\frac{2}{3}A^3]=tr(d(A+dA)+\frac{2}{3}\times 3tr(dA\wedge A\wedge A)=tr(dA\wedge dA)+2tr(dA\wedge A\wedge A)$$

$=tr(F\wedge F)$