

§ 4.2.2 The Yang-Mills functional

§01 定義

Let M be a compact, oriented Riemannian manifold, E a vector bundle with a bundle metric over M , D a metric connection on E with

curvature $F_D \in \Omega^2(AdE)$ 。

The Yang-Mills functional applied to D is

$$YM(D) := (F_D, F_D) = \int_M \langle F_D, F_D \rangle * (1)$$

A connection D on E is called metric if $d\langle \mu, \nu \rangle = \langle D\mu, \nu \rangle + \langle \mu, D\nu \rangle$ for all $\mu, \nu \in \Gamma(E)$

$F_D \in \Omega^2(AdE)$ 意思是說 F_D 是取值在 adjoint bundle 的 2-form。

考慮一個主纖維叢，並在其上定義一個連絡 A ，聯絡 A 的強度由其曲率 F_A 決

定。Yang-Mills 泛函 $YM(A) = \frac{1}{2} \int_M \|F_A\|^2 dV_g$

其中 $\|F_A\|^2$ 是曲率強度， dV_g 是時空 volume form。

§02 規範場的總能量或作用量：

1. 幾何上的曲率最優化

物理學中的場在數學中是主叢上的 connection， $YM(A)$ 衡量的是這個 connection 的彎曲程度。

- (1) 場強即曲率
- (2) 能量即作用量
- (3) 非線性即交互作用

交互作用	規範群	規範粒子
電磁力	U(1)	光子(photon)
弱交互作用	SU(2)	W 與 Z 玻色子
強交互作用	SU(3)	膠子(gluon)

規範原理：

如果我們要求物理定律在「局部」的對稱變換（即每個時空點的變換可以獨立選擇）下保持不變，那麼我們就必須引入傳遞力的粒子（規範玻色子）。

電磁力來自於 U(1) 局部對稱性，弱力來自 SU(2)，強力來自 SU(3)。

§03 對 Yang-Mills functional 做變分：

Yang-Mills 泛函的一階變分：推導 $S(A)$ 的一階變分並得到 Euler-Lagrange 方程。

(1) 定義 Yang-Mills functional $S(A) = \frac{1}{2} \int_M \|F_A\|^2 dV_g = \frac{1}{2} \int_M \text{Tr}(F_A \wedge *F_A)$

(2) 曲率變分

考慮 connection 的變分 $A_t = A + t\alpha$, $\alpha \in \Omega^1(M, adP)$ 是 compact support 的 Lie value 1-form , 即一個 test form 。

$F_A = dA + A \wedge A$ 計算 F_{A_t}

$$\begin{aligned} F_{A_t} &= F_{A+t\alpha} = d(A+t\alpha) + (A+t\alpha) \wedge (A+t\alpha) \\ &= dA + t d\alpha + A \wedge A + (A \wedge \alpha + \alpha \wedge A) + t^2(\alpha \wedge \alpha) \\ &= F_A + t(d\alpha + [A, \alpha]) + O(t^2) \end{aligned}$$

定義 $d_A \alpha = d\alpha + [A, \alpha]$

註 對 p-form ω , q-form η , $[\omega, \eta] = \omega \wedge \eta - (-1)^p \eta \wedge \omega$ 所以

$$[A, \alpha] = A \wedge \alpha - (-1)\alpha \wedge A = A \wedge \alpha + \alpha \wedge A$$

驗證 $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F_{A_t} = d_A \alpha$

$F_{A_t} = dA_t + A_t \wedge A_t$ 則

$$\begin{aligned} F_{A+t\alpha} &= d(A+t\alpha) + (A+t\alpha) \wedge (A+t\alpha) \\ &= dA + A \wedge A + t(d\alpha + [A, \alpha]) + o(t^2) \\ &= F_A + t d_A \alpha + o(t^2) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F_{A_t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_{A+t\alpha} - F_A}{t} = d_A \alpha$$

(3) 計算 $\delta S(A)$

$$\begin{aligned} \delta S(A) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{1}{2} \int_M \langle F_{A_t}, F_{A_t} \rangle dV_g = \int_M \left\langle \frac{d}{dt} F_{A_t}, F_A \right\rangle dV_g \\ &= \int_M \langle d_A \alpha, F_A \rangle dV_g = \int_M \langle \alpha, d_A^* F_A \rangle dV_g \end{aligned}$$

註 d_A^* 是 d_A 的 adjoint operator , $d_A^* = (-1)^{n(k-1)+1} * d *$

根據變分原理, 若 A 是臨界點, 則對於所有測試形式 α , $\delta S(A) = 0 \Rightarrow d_A^* F_A = 0$

這就是 Yang-Mills 方程。

在 M 為 4 維定向流形, F_A 是 Yang-Mills 方程的解, 即為 instanton 或者 anti-

instanton。

伴隨算子 d_A^* 要滿足 $\int_M \langle d_A \alpha, \beta \rangle_{L^2} = \int_M \langle \alpha, d_A^* \beta \rangle_{L^2}$

定義

D is a critical point of the Yang-Mills functional if and only if

$D^* F_D = 0$ 。此時 D 稱為 Yang-Mills connection。

在局部座標 ($g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ 下, $F_D = F_{ij} dx^i \wedge dx^j$)

$$d^*(F_{ij} dx^i \wedge dx^j) = -\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^i} dx^j, \quad D^* F_D = \left(-\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^i} - [A_i, F_{ij}]\right) dx^j$$

$$D^* F_D = 0 \text{ 變成 } \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^i} + [A_i, F_{ij}] = 0 \text{ or } j=1, 2, \dots, n$$

在幾何分析中, Yang-Mills 連絡代表了一種最穩定或最平衡的幾何結構。就像肥皂泡尋求面積最小化一樣, 向量叢尋求的是總曲率平方和的最小化。

§04 gauge transformation

$$\text{電磁場 } E = -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t}, B = \nabla \times A$$

Gauge transformation $A \rightarrow A + \nabla \chi, \phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ 其中 $\chi(r, t)$ 是任意純量函數。

Gauge grup=U(1) 因為 $\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi$

G is the gauge group of the metric bundle。

D is the metric connection。

$$g \in G, \quad g^*(D) := g^{-1} \circ D \circ g$$

For $D=d+A$ then $g^*(A) = g^{-1} dg + g^{-1} A g$

亦即 $A \rightarrow g^{-1} A g + g^{-1} dg$, 此時 $F_A \rightarrow g^{-1} F_A g$

Vector bundle $E \rightarrow M$ 上的 section s 代表物理場, 規範群 G 的元素 $g(x)$ 作用在截面上的方式為 $s \rightarrow g \cdot s$ 。

為了計算場的變化, 我們定義了共變導數 (聯絡) D。我們希望在變換座標 (規範變換) 後, 導數的計算結果依然保持幾何上的相容性。

具體來說，如果我們將截面 s 變換為 $g \cdot s$ ，則新的聯絡 D' 作用在變換後的截面上，應該等於原聯絡作用後的結果再進行變換：

$$D'(gs) = g(Ds), \text{ 即 } D' = g \circ D \circ g^{-1}$$

$$\begin{aligned} (g^*(D))s &= (g^{-1}Dg)s = g^{-1}D(gs) = g^{-1}((d+A)(gs)) \\ &= g^{-1}(d(gs) + A(gs)) = g^{-1}((dg)s + g(ds) + A(gs)) \\ &= g^{-1}(dg)s + ds + g^{-1}Ags = d + g^*(A) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } g^*(A) = g^{-1}dg + g^{-1}Ag$$

定理 4.2.1 (關於不變性)

The Yang-Mills functional is invariant under the operator of the gauge group G .

Hence also the set of critical points of YM, i.e. the set of Yang-Mills connections, is invariant. Thus, if D is a Yang-Mills connection, so is s^*D for $s \in G$.

YM 泛函(想像成系統的總能量或作用量)在規範群的作用下是不變的。

如果 D 是 YM connection (YM 方程的解) 則變換後的 s^*D 也是 YM connection。

§05 selfdual (自對偶)

定義 4.2.5 (自對偶聯絡：瞬子)

A connection D on a vector bundle over an oriented four dimensional Riemannian manifold is called (anti)selfdual or an (anti)instanton

if its curvature F_D is an (anti)selfdual 2-form.

Hodge star 算子 $*$ 把一個 k -form 映射成 $n-k$ form, $n=4$ 時，對於一個 2-form

$*\Lambda^2(M) \rightarrow \Lambda^2(M)$ 是一個 linear transformation, 在 4 維流形上

$*^2 = (-1)^{2(4-2)} = 1$ 這意味著 $*$ 的 eigenvalue = ± 1 , 因此, 2-form 的向量叢可分解為兩個特徵子空間的直和：

$$\Lambda^2(M) = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

Λ^+ (selfdual) : 對應特徵值為 +1 的空間。

Λ^- (anti-selfdual) : 對應特徵值為-1 的空間。

若 curvature 2-form F_A 滿足

$*F_A = F_A$ 則稱為 self-dual (此時的 connection 稱為瞬子。)

根據 Bianchi 恆等式，任何 connection 的曲率都滿足 $d_A F_A = 0$

若 $*F_A = F_A$ 則 $d_A(*F_A) = d_A F_A = 0$ ， F_A 是 YM 方程的解。

$*F_A = -F_A$ 則稱為 anti-selfdual。

因此得到定理 4.2.2

Each (anti)selfdual metric connection is a solution of Yang-Mills equation。

§06 invariant polynomial

從 $s \in G$ (gauge group) $s^* F = s^{-1} \circ F \circ s : F_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}^{-1} F_\beta \varphi_{\alpha\beta}$

在向量叢 E 上，曲率在不同的局部蓋蓋 α 與 β 之間，是透過轉換函數 φ 進行伴隨表示 (Adjoint representation) 的變換。這意味著曲率 F 本質上可以看作是自同態叢 $\text{End}(E)$ (或記作 $\text{Ad}(E)$) 的一個截面。

雖然曲率 F 包含了空間的幾何資訊，但它本身值會隨著基底的選取 (即 φ) 而改變。為了得到反映空間本質 (拓撲特性) 的數值，我們需要一個函數 P ，使得無論我們如何變換座標，輸出的結果都保持不變

給定一個 $m \times m$ 的複矩陣空間 M_m ，一個多項式 P 若滿足 $P(B) = P(\varphi^{-1} B \varphi)$ 則稱為不變的。通常要求 P 是 k 次齊次多項式。

當我們把「曲率矩陣 F 」代入這個不變多項式 $P(F)$ 時，因為 F 的變換符合

$F_\alpha = \text{Ad}(\varphi^{-1}) F_\beta$ ，而不變多項式正好抵消了 φ 的影響， $P(F)$ 將成為流形 M 上一

個全域定義的微分形式，不再依賴於局部坐標的選取。

這正是構造特徵類 (Characteristic Classes) 的關鍵步驟。

例如，當 P 取為跡函數 (Trace) 或行列式 (Determinant) 的展開項時，我們就能得到陳類，進而將幾何 (曲率) 與拓撲 (不變量) 聯繫起來。

§ Chern-Weil theory :

G 是一個李群， η 是其李代數。

$P: \eta \rightarrow \mathbb{C}$ 是 k 次齊次多項式，若 $P(\text{Ad}_g X) = P(gXg^{-1}) = P(X)$ 對所有的 $g \in G, X \in \eta$ 都成立，則稱 P 為不變多項式。

當我們在一個主叢上給定一個聯絡 ω 及其曲率形式 Ω 時， Ω 是一個取值於 η 的 2-形式。我們可以用不變多項式 P 作用於 Ω :

- (1) $P(\Omega)$ 是一個定義在流形 M 上的 $2k$ -次微分形式
- (2) $d(P(\Omega)) = 0$ (根據 Bianchi 恆等式)，即 $P(\Omega)$ 是一個 closed form。
- (3) $P(\Omega)$ 所代表的 de Rham 上同調類 $[P(\Omega)] \in H_{dR}^{2k}(M)$ 與聯絡 Ω 的選取無關。

常見的例子

在幾何分析中，我們最常處理的是與矩陣跡和行列式相關的不變多項式：

- (1) Chern classes : 源自於多項式 $P(X) = \det(I + \frac{i}{2\pi} X)$ 。展開後的各階係數即為各階陳類。
- (2) Pontryagin classes : 針對實向量叢，利用 $P(X) = \det(I - \frac{i}{2\pi} X)$ 作用於曲率得到。
- (3) Pfaffian : 對於特徵維數的實向量叢(如 $SO(2n)$)，Pfaffian 是一個特殊的不變多項式，其對應的示性類即為尤拉類 (Euler class)，這是廣義 Gauss-Bonnet 定理的核心

在計算拉普拉斯算子的譜 (Spectral Geometry) 或研究指標定理 (Index Theorem) 時，我們經常需要在局部座標下計算曲率。

不變多項式保證了：儘管我們在局部使用的標架可能極其複雜，但最終計算出的幾何量 (如 L^2 模長、積分不變量) 在全局上是具有明確物理或幾何意義的。

例如，在黎曼幾何中，純量曲率本質上就是與跡相關的最簡單的不變量。

例 $U(2)$ 的不變多項式

探討 $U(2)$ 的不變多項式，本質上是在尋找定義在 $\mathfrak{u}(2)$ 上的多項式函數 P ，使得

對於所有 $g \in U(2)$ 和 $X \in \mathfrak{u}(2)$ ，滿足 $P(gXg^{-1}) = P(X)$ 。

根據不變量理論， $U(n)$ 的不變多項式環是由其特徵多項式的係數所生成的。

設 $X \in u(2)$ 。最常用的一組基本不變多項式生成元是跡 (Trace) 相關的多項式：

一階生成元： $f_1(X) = \text{Tr}(X)$ 二階生成元： $f_2(X) = \text{Tr}(X^2)$ (或者使用 $\det(X)$)

對於李群 $U(2)$ ，其李代數 $u(2)$ 由所有 2×2 的 skew-Hermitian matrices 組成。
與 Chern class 的聯繫：

在 Chern-Weil 理論中；我們通常考慮經過歸一化因子 $\frac{i}{2\pi}$ 處理後的特徵多項

式。令 $A = \frac{i}{2\pi} X$ ，則 $U(2)$ 的總陳類多項式定義為； $\det(I + A) = 1 + c_1(A) + c_2(A)$

展開後可以得到具體的不變多項式形式：

第一陳多項式： $c_1(X) = \text{Tr}\left(\frac{i}{2\pi} X\right)$

第二陳多項式： $c_2(X) = \det\left(\frac{i}{2\pi} X\right) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \det(X)$

4. 幾何分析中的意義

在處理叢的幾何時，若一個複向量叢 E 的結構群是 $U(2)$ ，這意味著該叢具有埃爾米特度量 (Hermitian metric)。

- $c_1(E)$ ：代表了該叢的行列式線叢 $\det(E)$ 的拓撲。
- $c_2(E)$ ：這是一個更深層的特徵，出現在如 **Yang-Mills 理論** 中。對於 S^4 上的 $SU(2)$ 叢，第二陳數 (c_2 的積分) 定義了瞬子數 (Instanton number)。

§07

The Chern classes of E are defined as $c_j(E) = [P^j\left(\frac{i}{2\pi} F\right)] \in H^{2j}(M)$,

where P^j is the j -th elementary symmetric polynomial, and F is the curvature of an arbitrary connection on E 。

例如 $c_1(E)$ (第一陳類)

根據 Chern-Weil 理論， $c_1(E) := \left[\frac{i}{2\pi} \text{Tr}(\Omega)\right] \in H_{dR}^2(M, R)$

2. 與行列式叢 (Determinant Line Bundle) 的關係

$c_1(E)$ 的一個核心性質是它可以被簡化為一個**複線叢 (Complex Line Bundle) **的問題。

對於任何複向量叢 E ，我們可以構造其**行列式叢** $\det(E) = \wedge^n E$ (這是 E 的最高次外積，為一個線叢)。一個關鍵的結論是：

$$c_1(E) = c_1(\det(E))$$

這意味著，研究高秩向量叢的第一陳類，本質上就是在研究某個複線叢的拓撲性質。

§ 定理 4.2.3

Let E be an $SU(m)$ vector bundle over the compact oriented 4-dimensional manifold M . Then an $SU(m)$ connection D on E yields an absolute minimum for YM if F is antiselfdual or selfdual, i.e. if it satisfies the first order equation $F = \pm *F$.

$$YM(D) = \int_M |F|^2 dV = \int_M (|F^+|^2 + |F^-|^2) dV$$

$$\text{拓撲荷 (topological charge)} k = \int_M c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(F \wedge F)$$

其中 $c_2(E)$ 是第二 Chern class。

$$\text{利用 Hodge 星算子，在四維情況下，} \int_M \text{Tr}(F \wedge F) = \int_M (|F^+|^2 - |F^-|^2) dV$$

$$8\pi^2 k = \int_M (|F^+|^2 - |F^-|^2) dV$$

$YM(D) = 8\pi^2 k + 2 \int_M |F^-|^2 dV \geq 8\pi^2 k$ 。當 $k > 0$ ，能量的下限由 k 決定， $F^- = 0$ (即 $F = *F$) 時達到這個下界。

定理 4.2.3 指出，拓撲荷為 Yang-Mills 作用量提供了一個由流形和叢的拓撲結構所決定的「能量下限」。

滿足 $F = \pm *F$ 的場 (即瞬子) 正是那些將場論的動力學能量降至拓撲極限的最優配置。

例 DPST 瞬子

是四維歐幾里得空間 (或 S^4 流形) 中 Yang-Mills 方程的第一個非平凡經典解 (定理 4.2.3 中 topological charge $k=1$ 的實例)，1975 年由四位蘇聯物理學家所發現的。

對於 SU(2) 規範群，DPST 瞬子的聯絡(規範勢)通常表示為

$$A_\mu(x) = \text{Im}\left(\frac{x^2}{x^2 + \rho^2} g^{-1} \partial_\mu g\right)$$

直觀類比：在一個地形起伏的山谷中尋找最低點

- (1) 一般的 D，像是山坡上任一點，隨時可能往下滑。
 - (2) Yang-Mills 解：像是山谷的底部或鞍點。
 - (3) 自對偶解：這不只是山谷底部，它更像是被地形(拓撲)所限制住的最深處。
- 瞬子是在給定拓撲荷下，能量最精簡的狀態。
這個定理顯示在 4 維流形上，YM 泛函的特性。

並預告在 3 維流形的 Chern-Simons 泛函 $CS(A) = \int_M \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$

其中 M 是 3 維流形，通常是閉合的。

$A \wedge dA$ 與 Abelian 情況下的螺旋度(helicity)類似，描述場線的纏繞。

想像 4-dim W， $\partial W = M$ ，如果在 W 上定義一個 curvature form

$$F = dA + A \wedge A$$

則(根據 Chern-Weil theory) $\int_W \text{tr}(F \wedge F) = \int_M CS(A)$

即 Chern-Simons functional 可以看作是特徵類(如第二陳類)在邊界的降維表現。

Chern-Simons functional 的 Euler-Lagrange 方程(即變分臨界點)恰好是 $F=0$ 。這意味著該泛函的臨界點對應於流形上的平坦聯絡，與低維拓撲中的基礎群表示論直接掛鉤。

§ 08 Yang-Mills 方程 $d_A^* F_A = 0$

考慮 principal bundle 上的 Lie group 例 SU(3)

connection 1-form A

curvature 2-form $F = dA + A \wedge A$

$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ 其中 g 是耦合常數， f^{abc} 是結構常數。

Lagrange 密度 $L_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$

場方程：

無物質源時，Yang-Mills 方程為 $D^\mu F_{\mu\nu}^a = 0, D^\mu = \partial^\mu + gf^{abc} A^{b\mu}$

Yang-Mills mass gap 是未解難題。

廣義相對論的正質量問題：

(1) R. Schoen Yau 用 minimal surface

(2) E. Witten 用 spin geometry + Dirac operator $D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{1}{4} R$

ADM mass 的精確定義 \Rightarrow Witten 證明 \Rightarrow Lichnerowicz formula \Rightarrow Yamabe problem, scalar curvature rigidity

§ 09 Yang-Mills functional 在 critical point 的二階變分

設 $A_t = A + t\alpha$ 是聯絡空間的一條曲線，其中 $\alpha \in \Omega^1(M, adP)$ 是變分方向 (即一個

伴隨叢值的 1-form)。若 A 是 Yang-Mills 方程 $D_A^* F_A = 0$ 的解，其第二變分 (即

Hessian) 可以寫成 $\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} YM(A + t\alpha) = \int_M \langle \mathfrak{H}_A(\alpha), \alpha \rangle dV_g$

其中 $\mathfrak{H}_A(\alpha) = D_A^* D_A \alpha + [*F_A, *\alpha]$ 稱為 Yang-Mills Hessian 算子。

Yang-Mills flow $\frac{\partial A_t}{\partial t} = -d_A^* F_A$

如果一個 Yang-Mills connection 的 Hessian 有負特徵值，則它是不穩定的，熱流會使其遠離這個狀態，趨近於更低能量的狀態 (例如 instanton)

§ Chern-Simons forms

$Q_{2k-1}(A)$ 滿足 $dQ_{2k-1} = Tr(F^k)$

例

二階 Chern-Simons form

The Chern-Simons functional of A is defined as

$Q_3(A) = tr(A \wedge A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$ 則 $dQ_3 = Tr(F \wedge F)$

五階 (對應於 $Tr(F^3)$)

$Q_5(A) = Tr(A \wedge dA \wedge dA + \frac{3}{2} A^3 \wedge dA + \frac{3}{5} A^5)$ (這裡的幕次表示楔積)。

1. 不閉合性： $dQ_{2k-1}(A)$ 等於一個特徵類的閉形式，所以 Q_{2k-1} 本身不是閉的，除非 $F^k = 0$ 。

2. 非唯一性：若對 A 做規範變換 $A \rightarrow g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ ，則 $dQ_{2k-1}(A)$ 會改變一個閉形式。這導致其積分（Chern-Simons 作用量）在規範變換下會改變一個整數倍（與 winding number 有關）。
3. 拓撲性質：Chern-Simons 形式的積分（在適當緊化或邊界條件下）給出拓撲不變量，例如 Chern-Simons 理論中的期望值與 knot invariants（如 Jones 多項式）相關。

Chern 類是 $Tr(F^k)$ 的上同調類，而 Chern-Simons 形式則是該閉形式在「局部」的一個「積分前身」。在無撓且閉流形上，Chern-Simons 形式本身不是全域定義的（除非某種條件成立），但它們在規範變換下的變換性質與第二類陳類（二階）或更高階陳類相關。

§ SU(2)在 Yang-Mills 理論 [LieGroup103SU(2)]

一. 規範對稱性與場強張量

(1) Gauge potential : connection A 可以寫成 $A_\mu = A_\mu^a J_a$ ， $J_i = \frac{\sigma_i}{2}$ ， σ_i 是 Pauli 矩陣。

(2) Field strength : $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$ 利用 $[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c$ ，分量形式變成 $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

二. 弱交互作用

在粒子物理的標準模型中，弱交互作用就是一種 SU(2)規範理論。

三. 瞬子與拓撲性質

從幾何與拓撲的角度來看，SU(2)在 Yang-Mills 理論中有極其優美的結構。

(1) Chern-Simons forms

(2) Instantons

(3) 拓撲荷

四. 自對偶方程與幾何分析

在四維黎曼流形上，SU(2)Yang-Mills 作用量的極小值點出現在自對偶 (Self-dual) 或 抗自對偶 (Anti-self-dual) 方程的解： $F = \pm *F$ 這在數學上引發了 Donaldson 理論。利用 SU(2)聯絡的模空間 (Moduli Space)，數學家得以區

分四維流形的不同微分結構。這正是物理上的規範場論對現代幾何學產生的深遠影響。

§ Perspectives

1. 核心概念：交截形式(intersection form)： $\Gamma:H^2(M)\times H^2(M)\rightarrow R$
2. Donaldson 定理

若 M 是單連通且其交截形式為正定，則在適當的基底下，其交截形式可以用單位矩陣來表示。

微分拓撲的限制：根據 M. Freedman 的研究，存在一些單連通的拓撲四維流形，其交截形式並非單位矩陣。Donaldson 的發現證明了這類流形無法承載微分結構，揭示了四維空間中拓撲與微分結構之間的顯著差異。

3. 證明的核心工具：模空間(Moduli space)
4. 理論基礎與後續發展

- (1)分析基礎：Donaldson 的證明依賴於 Taubes 關於自對偶連接存在性的研究，以及 Uhlenbeck 關於（抗）自對偶連接分析性質的工作。
- (2)Donaldson 多項式：Donaldson 後續利用這些模空間的幾何與拓撲定義了新不變量（Donaldson Polynomials），極大地增進了對四維微分流形的理解。
- (3)簡化路徑：隨後發現了一種更簡潔的方法（即第 11 章將討論的內容），該方法基於旋量叢截面與輔助叢連接的耦合方程，涉及 $U(1)$ 阿貝爾規範群。