§ 習作

1. 考慮一個在 n 維黎曼流形(M,g)上的主 G-叢，其上的 Yang-Mills 泛函定義為 YM(A)= $\frac{1}{2}\int_M |F_A|^2 dV_g$。若將度量縮放為 $\tilde{g} = \lambda^2 g$（$\lambda > 0$ 為常數），在什麼維度 n 下，該泛函具有共形不變性？ n=4

其中 $|F_A|^2 = g^{ik} g^{jl} \langle F_{ij}, F_{kj} \rangle$（內積取自伴隨表示的不變內積）

$dV_g = \sqrt{\det g}\, dx$

在縮放下的變換 $g \to \tilde{g} = \lambda^2 g$ ： $\tilde{g}^{ij} = \lambda^{-2} g^{ij}$

$$\widetilde{\mathrm{YM}}(A) = \frac{1}{2}\int_M |\tilde{F}_A|^2_{\tilde{g}}\, dV_{\tilde{g}} = \frac{1}{2}\int_M \left(\lambda^{-4}|F_A|^2_g\right)(\lambda^n dV_g) = \lambda^{n-4}\cdot\frac{1}{2}\int_M |F_A|^2_g\, dV_g。$$

2. 設 A 為聯絡，F_A 為其曲率。若對聯絡進行微擾 $A_t = A + t\alpha$，其中 α 是值在伴隨叢 Ad(P)中的 1-形式。請問曲率的變分 $\frac{d}{dt} F_{A_t}|_{t=0}$ 等於什麼？

$F_A = dA + A\wedge A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ 這裡[ ]是伴隨叢值形式的李括號

$[\alpha, \beta] = \alpha\wedge\beta + \beta\wedge\alpha$ 在 Yang-Mills 裡常用 $[\alpha, \beta] = \alpha\wedge\beta - (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta\wedge\alpha$

在 1-form 時 $[\alpha, \beta] = \alpha\wedge\beta - (-1)\beta\wedge\alpha = \alpha\wedge\beta + \beta\wedge\alpha$

$\frac{d}{dt} F_{A_t}|_{t=0} = d\alpha + \alpha\wedge A + A\wedge\alpha = d_A\alpha$ (協變微分)

3. 考慮一個 U(1)規範理論，若 connection form $A = A_\mu dx^\mu$，curvature form F=dA，此時 Yang-Mills 方程 $d_A^* F_A = 0$ 會退化為甚麼？

無源項的 Maxiwell 方程

4. 給一個 connection A，其 curvature form 定義為 $F_A = dA + A\wedge A$，其 Bianchi 恆等式為何？

外共變微分 $D\omega = d\omega + A\wedge\omega + (-1)^{\deg\omega}\omega\wedge A$

$dF = d(dA + A\wedge A) = 0 + d(A\wedge A) = (dA)\wedge A - A\wedge d(A)$

$dA = F - A\wedge A$ 代入

$dF = (F - A\wedge A)\wedge A - A\wedge(F - A\wedge A) = F\wedge A - (A\wedge A)\wedge A - A\wedge F + A\wedge(A\wedge A)$

$\quad = F\wedge A - A\wedge F = [F, \mathrm{A}]$

$dF + [A, F] = 0$

即 $DF = dF + [A, F] = 0$ （這裡 F 是 F_A 的簡寫）

5．Yang-Mills 泛函在規範變換下 $A \to g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ 下是不變的，曲率 F_A 規範變換下如何變換？

先確認李群或矩陣中，$d(g^{-1}) = -g^{-1}(dg)g^{-1}$

$g \cdot g^{-1} = I$ ，$d(g \cdot g^{-1}) = (dg) \cdot g^{-1} + g \cdot d(g^{-1}) = d(I) = 0$

$g \cdot d(g^{-1}) = -(dg) \cdot g^{-1}$ 所以 $d(g^{-1}) = -g^{-1}(dg)g^{-1}$

設 $A' = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ 欲證 $F_{A'} = g^{-1}F_A g$

$$dA' = d(g^{-1}Ag + g^{-1}dg) = d(g^{-1}Ag) + d(g^{-1}dg)$$
$$= (dg^{-1}Ag + g^{-1}dAg - g^{-1}A \wedge dg) + (dg^{-1} \wedge dg + g^{-1}d^2 g)$$

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (d\eta)$$

這裡 g, g^{-1} 是 0-form，A 是 1-form

$d(g^{-1}Ag) = d(g^{-1}) \wedge Ag + (-1)^0 g^{-1} d(Ag)$ $\quad d(Ag) = dA \cdot g - A \wedge dg$

所以 $d(g^{-1}Ag) = d(g^{-1}) \wedge Ag + g^{-1}(dA)g - g^{-1}A \wedge dg$

$$dA' = -g^{-1}dgg^{-1} \wedge Ag + g^{-1}dAg - g^{-1}A \wedge dg - g^{-1}dgg^{-1} \wedge dg$$

$A' \wedge A' = \cdots$

$F_{A'} = dA' + A' \wedge A' = ... = g^{-1}F_A g$

6．考慮 Yang-Mills 泛函 $YM(A) = \frac{1}{2}\int_M |F_A|^2 dV$ 在 4 維 compact 流形上，這個能量與拓撲電荷 $k = \frac{1}{8\pi^2}\int_M Tr(F_A, F_A)$ 有何關聯？

$\mathrm{YM(A)} \geq 4\pi^2 |k|$

7．數學上定義 $F = D^2$ ，把 connection D=d+A 推到 Yang-Mills 場強

$F = dA + A \wedge A$

$D\mu = (d + A)\mu = d\mu + A\mu$

$D(\mathrm{D}\mu)=(d+A)(d\mu+A\mu)$

$D^2\mu=d(d\mu+A\mu)+A\wedge(d\mu+A\mu)$

$d(d\mu)=0, A\wedge(A\mu)=(A\wedge A)\mu$

$d(A\mu)=(dA)\mu-A\wedge d\mu$ （負號是因為 A 是 1-form）

所以 $D^2\mu=(dA)\mu-A\wedge d\mu+A\wedge d\mu+(A\wedge A)\mu$
$=(\mathrm{dA}+\mathrm{A}\wedge\mathrm{A})\mu$

$F=\mathrm{D}^2=dA+A\wedge A$

（$d(\omega\wedge\eta)=(d\omega)\wedge\eta+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge(d\eta)$）

8. 推導 D=d+A

其中 D：外共變導數(exterior covariant derivative)作用於一個 E-value k-form $\omega\in\Omega^k(M,E)$。$D\omega=d\omega+A\wedge\omega$

設 $E\to M$ 是 vector bundle

$D:\Gamma(E)\to\Omega^1(M,E)$是一個算子，滿足 Leibniz 法則

$D(fs)=df\otimes s+fDs$

$U\subset M$ 選一組 frame$\{e_1,...,e_n\}$ $s=\sum_i s^i e_i$

$Ds=D(\sum_i s^i e_i)=\sum_i ds^i\otimes e_i+\sum_i s^i De_i$

$\because De_i$是向量值的 1-form，$\therefore De_i=\sum_j A_{ij}e_j$ 其中 $A_{ij}\in\Omega^1(M)$

Let $s=(s^1,...s^n)^T$，上式寫成矩陣形式為 Ds=ds+As

即 D=d+A

這裡 A 即 Yang-Mills connection。

例

二維球面 S^2 在標準度量下的 Levi-Civita 聯絡如何具體寫成 D = d + A 的形式。

S^2 上，$g=d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2$，正交基$\{e_1,e_2\}$ $e_1=\frac{\partial}{\partial\theta}, e_2=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$

D 是 S^2 上的 Levi-Civita connection，向量場 $X=\sigma^1 e_1+\sigma^2 e_2$ 則

$$\mathrm{DX}=\mathrm{D}\begin{pmatrix}\sigma^1\\ \sigma^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\sigma^1\\ d\sigma^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\cos\theta d\phi\\ \cos\theta d\phi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma^1\\ \sigma^2\end{pmatrix}$$

其中$\begin{pmatrix}0 & -\cos\theta d\phi\\ \cos\theta d\phi & 0\end{pmatrix}=A$

$\{e_1,e_2\}$的 dual 1-form 為$\omega^1=d\theta,\omega^2=\sin\theta d\phi$

$d\omega^i+\sum\omega^i_j\wedge\omega^j=0$ 解出$\omega=\begin{pmatrix}0 & -\cos\theta d\phi\\ \cos\theta d\phi & 0\end{pmatrix}$

Levi-Civita connection [N3101]

$$\nabla_X Y=\sum_i(XY^i+\sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}X^jY^k)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

其中$\nabla_{e_i}e_j=\Gamma^k_{ij}e_k$，$X=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i},Y=\sum_i Y^i\frac{\partial}{\partial y^i}$

這裡 Christoffel symbols 看做一個 connection 1-form A 的矩陣分量。

接到§4.4 [GA4.4.1] connections for spin structure

考慮S^2上的自旋場 spin connection

(1)選擇 Clifford algebra 的表示

$$c(e_1)=\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},c(e_2)=\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\quad\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

S^2上只有一個非零項$\omega_{12}=-\cos\theta d\phi$

(2)計算 spin connection form Ω

$$\Omega=\frac{1}{4}\sum_{i,j}\omega_{ij}c(e_i)c(e_j)=\frac{1}{2}\omega_{12}(i\sigma_3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i\cos\theta d\phi & 0\\ 0 & i\cos\theta d\phi\end{pmatrix}$$

(3)自旋場的 covariant derivative

對於一個 section $\psi=(\psi_1,\psi_2)^T$，其 covariant derivative

$$\nabla^S\psi=(d+\Omega)\psi=\begin{pmatrix}d\psi_1 & -\frac{i}{2}\cos\theta d\phi\cdot\psi_1\\ d\psi_2 & \frac{i}{2}\cos\theta d\phi\cdot\psi_2\end{pmatrix}$$

Dirac operator $D\psi:=\sum_{i=1}^{n}e_i\cdot\nabla_{e_i}\psi$

比較一下$DX=\begin{pmatrix}d\sigma^1 & -\cos\theta d\phi\sigma^2\\ d\sigma^2 & \cos\theta d\phi\sigma^1\end{pmatrix}$，X 是向量場，$\psi$是旋量場。

這是 Spin 群與 SO(n)群的差異。