定理 4.2.1 Yang-Mills functional 在規範變換下不變。

規範群 G 的元素 g 作用在截面上 $x \to g \cdot x$。
為保持協變導數的相容性，聯絡變換規則為： $A \to g^*(A) = g^{-1}dg + g^{-1}Ag$

先證明這件事，其次證明 $F_A \to g^{-1}F_A g$

§ 01 證明 $g^*(A) = g^{-1}dg + g^{-1}Ag$
D=d+A，我們想求 $g^*(D) = d + g^*(A)$
$(g^*(D))\mu = g^{-1}(D(g \cdot \mu))$ 意思是：
(1) g 先做用到截面 μ 上，得到 $g \cdot \mu$
(2) 用原來的協變導數 D 微分
(3) 因為微分後的結果身處變換後的空間，我們必須把它拉回（Pull-back）到原本的基準面，所以左乘一個 g^{-1} 。

先計算 D(gμ)
$D(g\mu) = (d + A)(g\mu) = d(g\mu) + Ag\mu = (dg)\mu + g(d\mu) + Ag\mu$
$g^{-1}(D(g\mu)) = g^{-1}((dg)\mu + g(d\mu) + Ag\mu) = g^{-1}(dg)\mu + d\mu + (g^{-1}Ag)\mu$
$g^*(D) = d + g^*(A)$
$(d + g^*(A))\mu = (g^{-1}(dg) + d + g^{-1}Ag)\mu$
所以 $g^*(A) = g^{-1}dg + g^{-1}Ag$

§ 2 證明 $F_A \to g^{-1}F_A g$

1. 先確認李群或矩陣中， $d(g^{-1}) = -g^{-1}(dg)g^{-1}$
   因為 $g \cdot g^{-1} = I$ ， $d(g \cdot g^{-1}) = (dg) \cdot g^{-1} + g \cdot (dg^{-1}) = d(I) = 0$
   所以 $d(g^{-1}) = -g^{-1}(\mathrm{dg})\mathrm{g}^{-1}$

2. 設 $g^*(A) = A' = g^{-1}dg + g^{-1}Ag$ ，證明 $F_{A'} = g^{-1}F_A g$

   $dA' = d(g^{-1}Ag + g^{-1}dg) = d(g^{-1}Ag) + d(g^{-1}dg)$
   $= (d(g^{-1}) \wedge Ag + g^{-1}(dA)g - g^{-1}A \wedge dg) + (dg^{-1} \wedge dg + g^{-1}d^2 g)$
   $= -g^{-1}dgg^{-1}Ag + g^{-1}(dA)g - g^{-1}A \wedge dg - g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg$
   $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg\omega}\omega \wedge d\eta$
   這裡 g, g^{-1} 是 0-form，A 是 1-form
   $d(Ag) = dA \cdot g - A \wedge dg$

3. $A' \wedge A' = g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg + g^{-1}dgg^{-1}Ag + g^{-1}A \wedge dg + g^{-1}(A \wedge A)g$

4. $F_{A'} = dA' + A' \wedge A' = g^{-1}(dA + A \wedge A)g = g^{-1}F_A g$

§ 03 最後證明 Yang-Mills functional 的不變性

$YM(D) := (F_D, F_D) = \int_M < F_D, F_D > *(1)$

$\left\langle g^*F, g^*F \right\rangle = \left\langle F, F \right\rangle$就是 YM functional 在規範變換下不變。

$\left\langle F, F \right\rangle = \int_M Tr(F \wedge *F)$ ， $g^*F = g^{-1}Fg$

$(g^{-1}Fg) \wedge *(g^{-1}Fg) = g^{-1}Fg \wedge g^{-1}(*F)g = g^{-1}(F \wedge *F)g$
$Tr(g^*F \wedge *(g^*F) = Tr(g^{-1}(F \wedge *F)g = Tr(\mathrm{F} \wedge *\mathrm{F})$

所以$\left\langle g^*F, g^*F \right\rangle = \left\langle F, F \right\rangle$ 得證。